Été–automne 2020
Solutions

Le triangle de Pascal

1. À chaque fois qu'il veut changer son code, Jérôme doit modifier l'ordre des lettres de A à F. Pour la première lettre, il a le choix parmi six lettres. Pour la seconde, il doit choisir parmi les cinq restantes, et ainsi de suite. Le nombre de choix possibles selon la position est alors

   | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

   Nombre de choix

   Et ces choix viennent se multiplier les uns les autres, pour ainsi dire. En effet, pour chaque choix fait de la première lettre, il y a cinq choix pour la deuxième; on se retrouve alors avec en tout 6 x 5 = 30 façons de faire ces deux premiers choix. Et ainsi de suite.

   Nous sommes ici face à ce qu'on appelle une situation multiplicative[1]. En effectuant le produit de ces choix, on obtient

   $6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$ codes possibles.

   Puisque Jérôme souhaite changer son code à tous les mois, il en a donc pour 60 ans.

   Dans les problèmes de dénombrement, chaque changement dans l'ordre de n objets est appelé une *permutation*. On observe que le nombre de permutations de n objets est $n!$, où

   $$n! = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1 \text{ et } 0! = 1.$$

   En effet, le raisonnement tenu pour résoudre dans le cas de 6 objets se généralise immédiatement à n objets.

   Dans ce problème, le nombre de codes est bel et bien 6! = 720.

2. Pour déterminer le nombre de codes possibles, il faut choisir un symbole parmi huit pour la première case, un symbole parmi sept pour la seconde et ainsi de suite. On a donc

   @ # $ % ? & * ±

   | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |

   Code choisi

   Ici encore, il s'agit d'une situation multiplicative et le nombre de codes est donc

   $8\times7\times6\times5\times4 = 6\,720$ codes possibles.

3. Pour exprimer le résultat à l'aide de la notation factorielle tout en conservant sa valeur, il faut multiplier et diviser le résultat par $3\times2\times1$, d'où

   $$\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = \frac{8!}{3!}.$$

4. Pour la première position, il y a n possibilités. Puique l'on ne peut répéter un symbole déjà choisi, il reste $n-1$ possibilités pour la seconde position, $n-2$ possibilités pour la troisième position et ainsi de suite jusqu'à la k^e position pour laquelle il y a $n-k+1$ possibilités.

   Le nombre de code est donc

   $$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1).$$

   (Il faut ici bien compter le rang du dernier terme).

   En multipliant et en divisant ce produit par

   $$(n-k)\times\cdots\times2\times1,$$

   on obtient

   $$\frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)(n-k)\times\cdots\times2\times1}{(n-k)\times\cdots\times2\times1}$$

   On peut alors utiliser la notation factorielle et cette expression est égale à

   $$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

   Il s'agit de ce qu'on appelle dans la littérature le nombre de *permutations* (ou d'*arrangements*) de n objets pris k à la fois.

1. *À propos de la notion de situation additive et de situation multiplicative, voir le solutionnaire des problèmes d'*Accromath, *vol. 11, hiver-printemps 2016, p. IV, no. 1-a.*

5. L'ordre selon lequel on énumère les éléments d'un sous-ensemble n'a aucune importance ; ainsi les expressions ;

   {@, #, $, %, ?}** et **{$, %, ?, @, #}

   représentent le même sous-ensemble.

   Pour déterminer le nombre de sous-ensembles de cinq symboles, on doit diviser le nombre de codes de cinq symboles obtenu au numéro 2 par le nombre de permutations de ces cinq symboles dans le code, ce qui donne

   $$\frac{8!}{3!}\times\frac{1}{5!}=\frac{8!}{3!5!}=\frac{6270}{120}=56 \text{ sous-ensembles.}$$

   En effet, chacun de ces sous-ensembles de cinq éléments donne lieu à 5! permutations.

6. Au numéro 4, on a obtenu que le nombre de codes de k symboles en choisissant parmi n symboles distincts sans répétition est

   $$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

   En divisant cette expression par le nombre de permutations des symboles dans chaque code, on obtient

   $$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

   En effet, chacun de ces sous-ensemble de k éléments donne lieu à k! permutations.

   Cette expression, qui désigne le *nombre de combinaisons* de k objets choisis parmi n objets, est noté $\binom{n}{k}$.

   L'expression

   $$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

   est utilisée pour effectuer les calculs par simplification multiplicative, comme on peut le voir dans le numéro qui suit.

7. On doit choisir les positions occupées par les a; ensuite on inscrit simplement b dans les positions restantes. L'ordre selon lequel on écrit les lettres a n'a aucune importance, puisque celles-ci sont indiscernables. Le nombre d'octuplets contenant cinq a et trois b est donc

   $$\binom{8}{5}=\frac{8!}{(8-5)!5!}=\frac{8!}{3!5!}$$
   $$=\frac{8\times7\times6\times5!}{3\times2\times1\times5!}=8\times7=56.$$

   On trouve donc 56 combinaisons de 5 positions choisies parmi 8 pour placer les a.

   Il est à noter que le produit des éléments d'un tel octuplet est a^5b^3.

8. En développant $(a+b)^8$, chaque terme est un prroduit de puissances de a et de b. Le terme a^5b^3 est formé de toutes les combinaisons de 8 lettres comportant cinq a et trois b. Ce terme est donc

   $$\binom{8}{5}a^5b^3,$$

   et son coefficient est 56.

9. En lançant un dé, la probabilité d'obtenir un 6 est $p = 1/6$. La probabilité de ne pas obtenir un 6 est $q = 1 - p = 5/6$. La probabilité d'obtenir trois fois le 6 en 8 lancers est alors

   $$f(3)=\binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

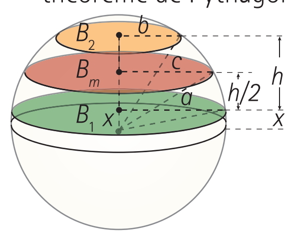
   En consultant le triangle de Pascal, on obtient $\binom{8}{3}=56.$ D'où il suit

   $$f(3)=56\times\frac{5^5}{6^8}=0{,}10419...$$

   Il y a donc 10,4 % de chances d'obtenir trois fois le 6 en lançant un dé huit fois de suite.

La formule magique

1. Si nous supposons que le cercle de rayon a se trouve à une hauteur x, alors le cercle de rayon c se trouve à une hauteur $x + h/2$ et le cercle de rayon b se trouve à une hauteur de $x + h$. Puisque ces trois cercles se trouvent dans une sphère de rayon r, nous pouvons écrire pour chacun d'entre eux une équation en utilisant le théorème de Pythagore.



$$a^2 + x^2 = r^2$$
$$c^2 + \left(x + \frac{h}{2}\right)^2 = r^2$$
$$b^2 + (x+h)^2 = r^2$$

Il est possible de remanier ces trois équations pour obtenir:

$$a^2 = r^2 - x^2$$
$$c^2 + xh + \frac{h^2}{4} = r^2 - x^2$$
$$b^2 + 2xh + h^2 = r^2 - x^2$$

Nous obtenons donc les deux équations suivantes:

$$c^2 + xh + \frac{h^2}{4} = a^2$$

$$b^2 + 2xh + h^2 = a^2$$

En multipliant par 2 la première équation et en les soustrayant,

$$2c^2 + 2xh + \frac{h^2}{2} = 2a^2$$

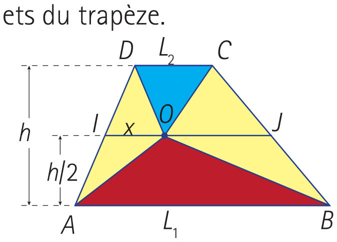
$$\underline{-(b^2 + 2xh + h^2 = a^2)}$$

$$2c^2 - b^2 - \frac{h^2}{2} = a^2$$

nous obtenons l'équation permettant d'obtenir le rayon du cercle médian,

$$c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{h^2}{4}.$$

2. Nous choisissons un point quelconque de l'arête L_m nommé O. Nous formons ensuite 6 triangles en joignant le sommet O aux quatre sommets du trapèze.



L'aire du triangle rouge est donnée par $A_1 = L_1h/4$. L'aire du triangle bleu est donnée par $A_2 = L_2h/4$. Remarquons ensuite que la somme des aires des quatre triangles en jaune est donnée par $A_m = L_mh/4$.
En notant x la longueur du segment IO et $L_m - x$ la longueur du segment OJ, on voit que les triangles ΔDOI et ΔOAI sont de même aire car ils ont la même base et la même hauteur. Les triangles ΔCOJ et ΔOJB sont eux aussi de même aire par le même raisonnement. Nous avons donc que l'aire totale de la surface jaune est:

$$\begin{aligned}\text{Aire jaune} &= \text{aire}(\Delta DOI) + \text{aire}(\Delta OAI) + \text{aire}(\Delta COJ) + \text{aire}(\Delta OJB)\\ &= \frac{xh}{4} + \frac{xh}{4} + \frac{(L_m - x)h}{4} + \frac{(L_m - x)h}{4}\\ &= \frac{L_mh}{4}.\end{aligned}$$

En additionnant les trois aires nous obtenons

$$A = \frac{h}{4}\left(L_1 + 2L_m + L_2\right).$$

Les simplexes de Pascal

1. Le coefficient du terme $a^3b^2c^2$ dans le développement de $(a + b + c)^7$ est

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3!}{3!\times 2\times 2}$$

$$= 7\times 6\times 5 = 210.$$

2. Le coefficient du terme $a^3b^3c^3$ dans le développement de $(a + b + c)^9$ est

$$\binom{9}{3,3,3} = \frac{9!}{3!3!3!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3!}{3!\times 3\times 2\times 3\times 2}$$

$$= 8\times 7\times 6\times 5 = 1680.$$

3. On veut montrer que

$$\binom{n}{k_1,k_2,k_3} = \binom{n-1}{k_1-1,k_2,k_3} + \binom{n-1}{k_1,k_2-1,k_3} + \binom{n-1}{k_1,k_2,k_3-1}.$$

En appliquant la définition de chacune des expressions du membre de droite, on obtient

$$\frac{(n-1)!}{(k_1-1)!k_2!k_3!} + \frac{(n-1)!}{k_1!(k_2-1)!k_3!} + \frac{(n-1)!}{k_1!k_2!(k_3-1)!}$$

En mettant au même dénominateur,

$$= \frac{(n-1)!k_1}{k_1!k_2!k_3!} + \frac{(n-1)!k_2}{k_1!k_2!k_3!} + \frac{(n-1)!k_3}{k_1!k_2!k_3!}$$

En factorisant

$$= \frac{(n-1)!(k_1 + k_2 + k_3)}{k_1!k_2!k_3!}$$

et, puisque $k_1 + k_2 + k_3 = n$, on a

$$= \frac{(n-1)!\times n}{k_1!k_2!k_3!} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$$

$$= \binom{n}{k_1,k_2,k_3}$$

La Covid en 19 questions

Solutions

Problème 1

a) La probabilité qu'une personne infectée demeure contagieuse qu'une seule journée est q. La probabilité qu'elle le demeure précisément deux jours est $q(1-q)$ puisque le premier jour de son infection elle demeure contagieuse avec probabilité . Enfin, elle le demeure précisément n jours avec probabilité $q(1-q)^{n-1}$. Ainsi le nombre moyen de jours de contagion est

$$\text{Nombre moyen de jours de contagion} = q\sum_{n=1}^{\infty} n(1-q)^{n-1} = q \times \frac{1}{q^2} = \frac{1}{q}.$$

et le nombre moyen est donc q^{-1}; ceci donne une interprétation concrète de la probabilité q.

Note : la somme utilisée ici est (−1) fois la dérivée terme à terme de la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-q)^n \quad \text{de raison } (1-q).$$

Puisque, pour cette raison $0 < 1-q < 1$, cette série géométrique est égale à $(1-(1-q))^{-1}$, la somme utilisée est $-\frac{d}{dq}(q^{-1}) = \frac{1}{q}$. .

b) L'évolution de la population d'infectés est

$$\begin{aligned} I(n+1) &= I(n) + pS(n)I(n) - q(n) \\ &= I(n) + pNS(n)I(n) - \frac{pN}{R_0} I(n). \end{aligned}$$

Si $S(n)$ est suffisamment proche de 1, le nombre d'infectés devient simplement

$$I(n+1) \approx I(n)\left(1 + \frac{pN}{R_0}(R_0 - 1)\right).$$

La grande parenthèse (qui ne dépend pas de n) est le nombre de personnes auxquelles l'infecté transmet le virus. À cause de l'approximation $S(n) \approx 1$, ce nombre ne dépend plus de n. Puisque le malade demeure infecté en moyenne pendant $q^{-1} = R_0/pN$ jours, jours, il infectera en moyenne

$$\left(1 + \frac{pN}{R_0}(R_0 - 1)\right)^{R_0/pN} \quad \text{personnes.}$$

Ceci est de la forme $\left(1 + \frac{1}{n}(R_0 - 1)\right)^n$ dont la limite quand $n \to \infty$ est simplement

nombre moyen de personnes infectées $\approx e^{R_0 - 1}$.

Dans le cas présent, n est le nombre moyen de jours de contagion qui est probablement au-delà de 10 pour la pandémie présente. L'approximation est alors raisonnable, même pour un R_0 proche de 3 ou 4. Finalement, si R_0 est proche de 1, l'argument de l'exponentielle est petit et une dernière approximation est possible :

$$e^{R_0 - 1} \approx 1 + (R_0 - 1) = R_0.$$

Cette dernière approximation est beaucoup moins bonne pour les R_0 estimés de la COVID-19. (À la fin juin 2020, le R_0 était proche de 4.)

Problème 2

a) Si l'unité de temps est la journée et si le nombre de nouveaux infectés est $pS(n)I(n)$ en une journée, on peut supposer qu'il est $p\Delta t\, S(t)\, I(t)$ lorsqu'on passe du temps t au temps $t + \Delta t$. De même on peut supposer que le nombre de nouveaux retirés est $q\Delta t\, I(n)$. On a alors :

$$\begin{aligned} S(t+\Delta t) &= S(t) - p\cdot\Delta t\cdot S(t)I(t) \\ I(t+\Delta t) &= I(t) + p\cdot\Delta t\cdot S(t)I(t) - q\cdot\Delta t\cdot I(t) \\ R(t+\Delta t) &= R(t) + p\cdot\Delta t\cdot I(t) \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire comme :

$$\begin{aligned} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} &= -p\cdot S(t)I(t) \\ \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} &= p\cdot S(t)I(t) - q\cdot I(t) \\ \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} &= p\cdot I(t) \end{aligned}$$

En prenant la limite quand $\Delta t \to 0$, on obtient le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} S'(t) &= -p \cdot S(t)I(t) \\ I'(t) &= p \cdot S(t)I(t) - q \cdot I(t) \\ R'(t) &= p \cdot I(t) \end{aligned}$$

b) On a que $N'(t) = N'(t) + I'(t) + R'(t)$. Comme sa dérivée est nulle, $N(t)$ est constante.

Problème 3

a) Si le test d'une tranche $x_i = t$ est positif, alors cette tranche contient au moins une personne infectée. Si le test de plus de deux tranches parallèles était positif, on aurait au moins trois infectés. De plus, si pour chaque i on a une seule tranche $x_i = t$ dont le test est positif, alors on aurait un unique infecté à l'intersection de ces tranches.

b) Si $k = 1$, ceci signifie qu'on a deux tests positifs $x_i = s$ et $x_i = t$ et un seul test positif $x_j = a_j$ pour $j \neq i$. On a 4 choix pour i, 3 choix pour l'ensemble $\{s, t\}$ et 3 choix dans $\{0, 1, 2\}$ pour chacun des a_j pour $j \neq i$., d'où $4 \times 3 \times 3^3$ choix.

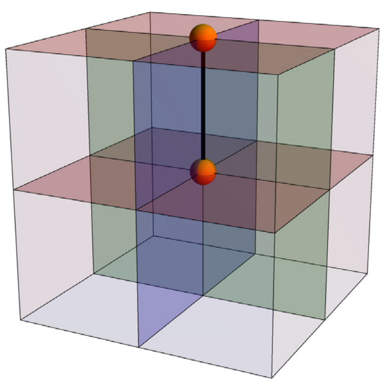


Figure dans le cas de la dimension 3

Si $k = 2$, on a deux tests positifs $x_i = s_i$ et $x_i = t_i$, deux tests positifs $x_j = s_j$ et $x_i = t_j$, et un seul test positif $x_n = a_n$ pour $n \neq i, j$. On a 6 choix pour l'ensemble $\{i, j\}$, 3 choix pour l'ensemble $\{s_i, t_i\}$ 3 choix pour l'ensemble $\{s_j, t_j\}$ et 3 choix dans $\{0, 1, 2\}$ pour chacun des a_n pour $n \neq i, j$, d'où $6 \times 3^2 \times 3^2$ choix. Mais on n'a pas fini. L'intersection de tous ces hyperplans nous donne les quatre sommets d'un carré. Puisque $k = 2$, nos deux points sont des sommets opposés du carré, d'où il y a 2 choix possibles.

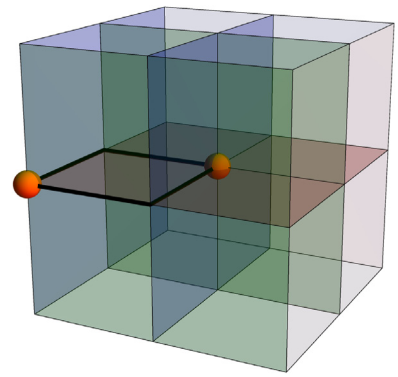


Figure dans le cas de la dimension 3

Si $k = 3$, on a deux tests positifs $x_i = s_i$ et $x_i = t_i$ deux tests positifs $x_j = s_j$ et $x_i = t_j$, deux tests positifs $x_h = s_h$ et $x_h = t_h$, et un seul test positif $x_n = a_n$ pour $n \neq i, j, h$. On a 4 choix pour l'ensemble $\{i, j, h\}$, 3 choix pour l'ensemble $\{s_i, t_i\}$ 3 choix pour l'ensemble $\{s_j, t_j\}$, 3 choix pour l'ensemble $\{s_h, t_h\}$ et 3 choix dans $\{0, 1, 2\}$ pour a_n pour $n \neq i, j, h$, d'où $4 \times 3^3 \times 3$ choix. Mais on n'a pas fini. L'intersection de tous ces hyperplans nous donne les huit sommets d'un cube en dimension 3. Nos deux points sont deux sommets opposés du cube, d'où il y a 4 choix possibles.

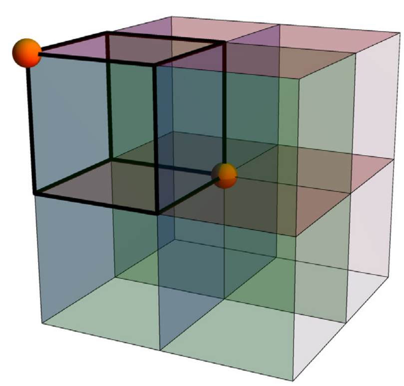


Figure dans le cas de la dimension 3

Si $k = 4$, on a deux tests positifs $x_i = s_i$ et $x_i = t_i$ deux tests positifs $x_j = s_j$ et $x_i = t_j$, deux tests positifs $x_h = s_h$ et $x_h = t_h$, deux test positifs $x_n = s_n$ et $x_n = t_n$. On a 3 choix pour l'ensemble $\{s_i, t_i\}$, 3 choix pour l'ensemble $\{s_j, t_j\}$, 3 choix pour l'ensemble $\{s_h, t_h\}$, 3 choix pour l'ensemble

$\{s_n, t_n\}$ d'où 3^4 choix. Mais on n'a pas fini. L'intersection de tous ces hyperplans nous donne les seize sommets d'un hypercube en dimension 4. Nos deux points sont deux sommets opposés de l'hypercube. Il y a donc 8 choix possibles.

c) Si $k = 1$, les tests $x_j = a_j$ ont identifié la droite où se situent les deux personnes infectées et leur position est donnée par l'ensemble $\{s, t\}$.

d) Si $k = 2$, on a montré que l'intersection des tranches ayant testé positif est donnée par les quatre sommets d'un carré (voir figure). Donc, on a au moins deux infectés en des sommets opposés du carré, mais on pourrait en avoir aussi aux autres sommets. Ainsi, quatre tests supplémentaires sont nécessaires pour identifier tous les infectés.

e) Si $k = 3$, on a montré que l'intersection des tranches ayant testé positif est donnée par les huit sommets d'un cube (voir figure). Donc, on a au moins deux infectés en des sommets opposés du cube, mais on pourrait en avoir aussi aux autres sommets. Ainsi, huit tests supplémentaires sont nécessaires pour identifier tous les infectés.

f) Si $k = 4$, on a montré que l'intersection des tranches ayant testé positif est donnée par les seize sommets d'un hypercube. Donc, on a au moins deux infectés en des sommets opposés de l'hypercube, mais on pourrait en avoir aussi aux autres sommets. Donc, seize tests supplémentaires sont nécessaires pour identifier tous les infectés.

Problème 4

a) On sait qu'on a exactement un infecté. Donc, il n'est pas nécessaire de tester tout le groupe. À chaque étape on scinde le groupe en deux sous-groupes égaux et on teste un sous-groupe. Si le test est positif, on sait que l'autre sous-groupe est négatif. On divise ce sous-groupe en deux moitiés et on teste une moitié. Etc. À l'étape s, chacun des deux sous-groupes à tester a un élément et un seul élément est positif. Il suffit d'un test pour l'identifier. On a fait étapes d'un test chacun. Donc, $M_1(s) = s$.

b) On sait qu'on a exactement deux infectés. Donc, si $s = 1$ on n'a besoin d'aucun test pour les identifier et, par suite, $M_2(1) = 0$. Si $s > 1$, on scinde le groupe en deux sous-groupes égaux et on teste chaque sous-groupe qui contient 2^{s-1} individus. Si chaque sous-groupe a un résultat de test positif, alors chaque sous-groupe a exactement un infecté. Par a), on peut l'identifier en $s - 1$ tests. Donc, on a besoin de $2 + 2M_1(s-1) = 2s$ tests pour l'identifier. Si un seul des sous groupes a un test positif, alors on a besoin de $M_2(s-1)$ tests supplémentaires pour identifier les deux infectés. On itère. Tout scénario amenant à une étape ultérieure $k \leq s-1$, à deux sous-groupes ayant chacun un résultat positif et contenant chacun $2^{s-k} > 1$ individus nous amène à faire $2k + 2M_1(s-k) = 2s$ tests. Le seul scénario qui amène à moins de tests est celui où, à chaque étape un seul des deux sous-groupes a un test positif. On a alors besoin de $2(s-1) + M_2(1) = 2(s-1)$ tests. Le pire scénario demande 2^s tests. Donc, $M_2(s) = 2s$.

Problème 5

On divise le groupe de 2^s individus en deux sous groupes A et B de 2^{s-1} individus chacun. Soit X_A le nombre d'individus infectés dans l'échantillon A, et X_B le nombre d'individus infectés dans l'échantillon B. Ces deux variables sont alors indépendantes et de loi binomiale de paramètres 2^{s-1} et p, d'où

$$\Pr(X_A > 0) = \Pr(X_B > 0) = 1 - (1-p)^{2^{s-1}} = 1 - q,$$

où $q = (1-p)^{2^{s-1}}$. De plus, le nombre total de tests associé à cette stratégie de dépistage de groupe est alors une variable aléatoire, appelons-la N_3, qui prend la forme suivante :

$$N_3 = \begin{cases} 1 & \text{si } X_A = X_b = 0 \\ 2^{s-1} + 3 & \text{si } X_A = 0 \text{ et } X_b > 0 \\ & \text{ou si } X_A > 0 \text{ et } X_b = 0 \\ 2^s + 3 & \text{si } X_A > 0 \text{ et } X_b > 0 \end{cases}$$

Puisque les variables $X_A = 0$ et X_B sont indépendantes, on déduit que

$$\mathrm{E}(N_3) = 1 \times q^2 + (2^{s-1}+3) \times 2q(1-q) + (2^s+3)(1-q)^2,$$

de sorte qu'après substitution et simplification, on trouve

$$\mathrm{E}(N_3) = 2^s(1-q) + 3 - 2q^2,$$

ou encore

$$\mathrm{E}(N_3) = 2^s(1-(1-p)^{2^{s-1}}) + 3 - 2(1-p)^{2^1}.$$

Problème 6

On considère les événements :

- A : l'individu a un test positif,
- E : l'individu est infecté
- F : l'individu est non infecté.

On cherche la probabilité conditionnelle Pr(E/A). Par la formule de Bayes cette probabilité vaut :

$$\Pr(E/A) = \frac{\Pr(E/A)\ \Pr(E)}{\Pr(E/A)\ \Pr(E) + \Pr(F/A)\ \Pr(F)},$$

c'est-à-dire

$$\Pr(E/A) = \frac{\frac{49}{50} \times \frac{2}{100}}{\frac{49}{50} \times \frac{2}{100} + \frac{1}{40} \times \frac{98}{100}} = \frac{4}{9} = 0,\overline{4}.$$