Été-automne 2019
Solutions

Algorithmes dans l'histoire

1. En appliquant l'algorithme d'Euclide, on obtient :

   a) $3\,135 = 3 \times 924 + 363$
   $924 = 2 \times 363 + 198$
   $363 = 1 \times 198 + 165$
   $198 = 1 \times 165 + 33$
   $165 = 5 \times 33 + 0.$

   Par conséquent, PGCD(924, 3 135)= 33.

   b) $337 = 4 \times 83 + 5$
   $83 = 16 \times 5 + 3$
   $5 = 1 \times 3 + 2$
   $3 = 1 \times 2 + 1$
   $2 = 2 \times 1 + 0.$

   Par conséquent, PGCD(83, 337) = 1.

   c) $9\,639 = 3 \times 2\,530 + 2\,049$
   $2\,530 = 1 \times 2\,049 + 481$
   $2\,049 = 4 \times 481 + 125$
   $481 = 3 \times 125 + 106$
   $125 = 1 \times 106 + 19$
   $106 = 5 \times 19 + 11$
   $19 = 1 \times 11 + 8$
   $11 = 1 \times 8 + 3$
   $8 = 2 \times 3 + 2$
   $3 = 1 \times 2 + 1$
   $2 = 1 \times 1 + 0.$

   Par conséquent, PGCD(2 530, 9 639) = 1.

   Pour les parties b et c, les deux nombres sont premiers entre eux.

L'héritage de Fermat

1. Factorisation

a) On veut factoriser $n = 493$. En appliquant la méthode de Fermat, on obtient :
$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = 22$. Puisque $n = a^2 - b^2 < a^2$ on cherche $a > \sqrt{n}$. Considérons $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 = 23$.
On a alors $a^2 - n = 23^2 - 493 = 36 = 6^2$.
Chanceux, on obtient du premier coup un carré parfait. On a donc :
$493 = 23^2 - 6^2 = (23 - 6)(23 + 6) = 17 \times 29.$

b) On veut factoriser $n = 1\,247$. En appliquant la méthode de Fermat, on obtient :
$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = 35$. Puisque $n = a^2 - b^2 < a^2$ on cherche $a > \sqrt{n}$. Considérons $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 = 36$.
On a alors $a^2 - n = 36^2 - 1\,247 = 49 = 7^2$.
Encore chanceux, on obtient un carré parfait à la première tentative. On a donc :
$1\,247 = 36^2 - 7^2 = (36 - 7)(36 + 7) = 29 \times 43.$

c) On veut factoriser $n = 6\,903$. En appliquant la méthode de Fermat, on obtient :
$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = 83$. Puisque $n = a^2 - b^2 < a^2$ on cherche $a > \sqrt{n}$. Considérons $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 = 84$.
On a alors $a^2 - n = 84^2 - 6\,903 = 153$.
La chance tourne, ce n'est pas un carré parfait .
On essaie $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 2 = 85$ qui donne :
$a^2 - n = 85^2 - 6\,903 = 322$ qui n'est pas un carré parfait.
On essaie $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 3 = 86$ qui donne :
$a^2 - n = 86^2 - 6\,903 = 493$ qui n'est pas un carré parfait.
On essaie $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 4 = 87$ qui donne :
$a^2 - n = 87^2 - 6\,903 = 666$ qui n'est pas un carré parfait.
On essaie $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 5 = 88$ qui donne :
$a^2 - n = 88^2 - 6\,903 = 841 = 29^2$. On a donc :
$$\begin{aligned}6\,903 &= 88^2 - 29^2 = (88 - 29)(88 + 29)\\ &= 59 \times 117.\end{aligned}$$

2. Démonstration

En utilisant l'inégalité de l'encadré de la page 11 du texte d'*Accromath*, comme $d_1 = p$ et $\Delta = d_2 - d_1 = q - p < 2\sqrt{2p}$, on a que le nombre k d'étapes satisfait à

$$\begin{aligned}k &< \frac{1}{8}\frac{\Delta^2}{d_1} + 1 = \frac{1}{8}\frac{(q-p)^2}{p} + 1\\ &< \frac{1}{8}\frac{8p}{p} + 1 = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que le nombre d'étapes est inférieur à 2, et donc égal à 1.

Émergence logarithmique

1. Suites

a) Soit la suite arithmétique

$a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d, a+nd, a+(n+1)d, \ldots$

Considérant le terme $a+nd$ par rapport à celui qui le précède et celui qui le suit, et prenant la moyenne arithmétique de ces deux derniers, on voit que

$$\frac{[a+(n-1)d]+[a+(n+1)d]}{2}=\frac{2a+2nd}{2}$$
$$=a+nd.$$

b) Étant donné la suite géométrique

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, ar^n, ar^{n+1}, \ldots,$$

il s'agit de montrer que chaque terme de cette suite, à partir du deuxième, est la moyenne géométrique de ses deux voisins. Or considérant un terme quelconque ar^n, on a

$$\sqrt{ar^{n-1}ar^{n+1}}=\sqrt{a^2r^{2n}}=ar^n.$$

2. Ce problème peut se voir comme l'occasion d'une réflexion autour de l'emploi de symboles en mathématiques — ou plutôt l'absence de notations symboliques, à une époque donnée —, en particulier les notations indicielles et exponentielles.

Nous examinons d'abord le problème en suivant de près le texte original d'Archimède dans *L'Arénaire*[1] — mais en faisant appel à une notation moderne pour représenter à l'aide de fractions les proportions (égalités de rapports) et les manipulations qui s'ensuivent. (Archimède exprime tout cela en mots, avec le vocabulaire et les notations mathématiques de son époque.)

Dans ses commentaires à propos de l'énoncé ici en jeu, Archimède considère une suite de nombres « continûment en proportion à partir de l'unité »[2] qu'il représente comme suit :

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}, \mathrm{H}, \Theta, \mathrm{I}, \mathrm{K}, \Lambda \qquad (\dagger)$$

(à l'aide des premières lettres de l'alphabet grec), le premier terme A étant égal à 1.

Par hypothèse, on a donc la série d'égalités de rapports

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}=\frac{\Delta}{\Gamma}=\frac{\mathrm{E}}{\Delta}=\cdots=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{I}}=\frac{\Lambda}{\mathrm{K}}.$$

Archimède s'intéresse au produit de deux termes quelconques de la suite (†), disons Δ et Θ, qu'il appelle X. Il considère alors le nombre qui, dans la suite, est « aussi éloigné de Θ que Δ est éloigné de l'unité » (voir l'énoncé du problème), c'est-à-dire Λ. Il annonce : « On doit démontrer que X est égal à Λ. »

Or Archimède connaît bien les règles de base de manipulation des proportions — exposées par exemple au Livre VIII des *Éléments* d'Euclide —, ce qui lui permet d'affirmer que parmi les nombres de la suite (†), comme Δ est aussi éloigné de A que Λ l'est de Θ, on a alors la proportion

$$\frac{\Delta}{\mathrm{A}}=\frac{\Lambda}{\Theta},$$

c'est-à-dire $\Delta\times\Theta=\Lambda\times\mathrm{A}$. Puisque A vaut 1, on a $\Delta=\Delta\times\mathrm{A}$, de sorte que, par substitution dans l'égalité précédente, on obtient

$$\Delta\times\mathrm{A}\times\Theta=\Lambda\times\mathrm{A},$$

et donc $\Delta\times\Theta=\Lambda$. Mais par hypothèse, on a $\mathrm{X}=\Delta\times\Theta$, ce qui montre que $\mathrm{X}=\Lambda$, tel qu'annoncé.

Archimède tire deux conséquences de ces observations :

- le produit de deux termes quelconques de la suite (†) « fait partie » de cette même suite;
- et ce produit $(\Delta\times\Theta)$ « est aussi éloigné du plus grand des nombres multipliés entre eux (Θ) que le plus petit (Δ) est éloigné de l'unité », puisque le produit est Λ.

Quant à la seconde affirmation d'Archimède concernant l'éloignement du produit Λ du premier terme, il se borne, à partir de la suite (†), à regarder d'une part la sous-suite

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}, \mathrm{H}, \Theta,$$

et d'autre part les termes $\mathrm{I}, \mathrm{K}, \Lambda$ permettant d'atteindre Λ à partir de Θ, à propos desquels il observe qu'ils sont un de moins que les termes formant la sous-suite $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$.

Tel qu'exprimé dans l'énoncé du problème dans *Accromath*, il est question ici d'une suite *géométrique* — la suite (†) considérée par Archimède — et d'une suite *arithmétique* — corres-

1. *Voir Paul Ver Eecke,* Les œuvres complètes d'Archimède, *tome 1, p. 366. Liège, Vaillant-Carmanne, 1960. Les citations entre guillemets sont tirées de cet ouvrage. (Mais voir la note infrapaginale suivante.)*
2. *Nous empruntons l'expression « nombres continûment en proportion » à Bernard Vitrac,* Euclide d'Alexandrie. Les Éléments, *vol. II, Presses Universitaires de France, 1994 — voir la note infrapaginale à la Proposition 1 du Livre VIII, p. 360. Ver Eecke parle plutôt de « nombres en proportion continue ».*

pondant à la position des termes à l'intérieur de cette suite géométrique, et donc de leur éloignement du premier terme de la suite.

Note 1 :

Les commentaires d'Archimède qui précèdent (dans le texte original) sont typiques de ce que l'usage désigne parfois comme une « algèbre rhétorique », c'est-à-dire des manipulations algébriques qui se font en mots, faute de disposer d'un symbolisme adéquat. Il peut être utile de reprendre la question en employant le symbolisme moderne.

Archimède considère une suite géométrique de la forme 1, r, r^2,... r^k, ... pour un r donné, c'est-à-dire la suite $(r^k)_{k\in\mathbb{N}}$. (On a généralisé à une suite de longueur infinie.) Il y a donc en jeu ici une suite de nombres A_1, A_2, A_3, ... (A comme dans Archimède) définis comme suit : étant donné un certain r (r comme dans rapport), on pose :

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 = r^0, \\ A_2 &= r^1, \\ A_3 &= r^2, \\ &\vdots \\ A_{k+1} &= r^k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Prenant deux termes de cette progression géométrique, disons r^n et r^m avec $m > n$, nous considérons leur produit $r^n \times r^m$. Il est clair (pour nous) que ce produit est r^{n+m} (*un gros merci en passant à la notation exponentielle!!!*). Mais n'ayant pas accès à un tel calcul, Archimède donne plutôt l'argument évoqué ci-haut — qui revient en fait à démontrer la règle de base des exposants :

$$r^n \times r^m = r^{n+m}.$$

En termes des A_k, ce produit est donc A_{n+m+1}. Le passage, dans la liste, du plus grand des deux facteurs, $A_{m+1} = r^m$, à A_{n+m+1} se fait de la même manière que le passage du premier terme, $A_1 = 1$, à A_{n+1}. C'est là la première affirmation d'Archimède. (Nous dirions aujourd'hui : il y a un « $+ n$ » dans les deux cas.)[3]

La seconde affirmation d'Archimède porte sur l'éloignement de $A_{n+m+1} = r^{n+m}$ de l'unité, par rapport aux éloignements respectifs de $A_{n+1} = r^n$ et de $A_{m+1} = r^m$ de l'unité. Le point de vue d'Archimède ici est de comparer le « rang » dans la liste $(A_k)_{k=1,\,2,\,3,\,...}$ de chacun des deux facteurs, A_{n+1} et A_{m+1}, avec le rang du produit A_{n+m+1}. À cet égard, il est clair que

$$n + m + 1 = (n + 1) + (m + 1) - 1.$$

En un certain sens, la subtilité derrière la deuxième affirmation d'Archimède est que la liste des A_k est numérotée à partir de 1, alors que les exposants des r^k commencent à 0. En particulier, considérant par exemple le cas de r^n, on voit que la liste

$$1, r, r^2, ..., r^n$$

contient $n+1$ termes, ce que reflète l'indice de A_{n+1}. Si on veut faire une « arithmétique des indices » (à la Archimède) pour parler du produit $r^n \times r^m$, il faut alors faire un « -1 » pour trouver le bon terme dans la suite des A_k. L'« arithmétique des exposants » (moderne!) gère cette situation sans qu'on ait à s'en préoccuper.

Dit autrement, il est banal pour nous aujourd'hui de numéroter une liste à partir ce 0, si cela s'avère commode : une telle pratique vise la simplification dans les manipulations algébriques. Le cadre notationnel dans lequel évoluait Archimède n'était pas du tout propice à de tels subterfuges.

Les suites géométrique et arithmétique ici en jeu apparaissent clairement en notation moderne : il y a la suite *géométrique* $\left(r^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ que l'on compare à la suite *arithmétique* des exposants $k = 0, 1, 2, 3, ...$ (ou si on préfère la suite des indices des A_k, $k = 1, 2, 3, 4, ...$).

3. À la suite géométrique

$$2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64,$$

le scribe de la tablette MLC 02078 associe d'une part la suite arithmétique

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6, \qquad (*)$$

dont le premier terme est $a = 1$ et la différence $d = 1$, et d'autre part la suite arithmétique

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 - 1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2}, \qquad (**)$$

avec $a = \dfrac{1}{4}$ et $d = \dfrac{1}{4}$.

3. *L'observation du phénomène du « + n » vaut autant pour les indices des A_k que les exposants des r^k.*

Le passage de la première suite arithmétique à l'autre peut donc être vu comme une simple division par 4 de chacun des termes de la première.

Il est aussi possible d'examiner cette situation en termes de la notion (moderne) de logarithme, c'est-à-dire d'exposant associé à une certaine base. Ainsi, si on exprime en notation exponentielle la série géométrique donnée, on a alors, avec la série arithmétique (*),

$$2^1 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - 2^5 - 2^6,$$

alors qu'avec la série arithmétique (**), on a

$$16^{\frac{1}{4}} - 16^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{3}{4}} - 16^1 - 16^{\frac{5}{4}} - 16^{\frac{3}{2}}.$$

Le passage d'une suite arithmétique à l'autre peut alors être interprété comme le passage d'un logarithme en base 2 à un logarithme en base 16. Prenons par exemple

$$32 = 2^5 = 16^{\frac{5}{4}}.$$

On peut alors lire de ces égalités que :

$$\log_2 32 = 5 \text{ et } \log_{16} 32 = \frac{5}{4}.$$

On pourrait ici faire appel à une formule bien connue[4] à propos du logarithme de x dans deux bases données, a et b :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Appliquant cette formule au présent contexte, on trouve alors

$$\log_{16} 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 16}.$$

Et comme $\log_2 16 = 4$, on retrouve immédiatement la division par 4 déjà mentionnée.

Note 2 :

Revenant à la suite géométrique donnée, considérons les trois termes (en ordre décroissant) $16 - 4 - 2$. Mettant l'accent sur le fait que $4 = \sqrt{16}$ et $2 = \sqrt{4}$, et observant les trois termes correspondants de la série arithmétique (**), à savoir

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4},$$

on voit que le passage d'un nombre à sa racine carrée revient à une division par 2 de son logarithme — ou si on préfère à la multiplication de l'exposant par 1/2, lorsque le nombre est exprimé comme une puissance. Cette observation est corroborée lorsqu'on regarde le passage de

$$64 = 16^{\frac{3}{2}} \text{ à } 8 = 16^{\frac{3}{4}}.$$

On aurait pu raisonner de même avec les puissances de 2 correspondantes :

$$2^4 - 2^2 - 2^1 \quad \text{ou encore} \quad 2^6 - 2^3.$$

4. Segments de droites

a) On identifiera ici, comme il est d'usage, un segment avec sa longueur.
On sait que $AP_1 = AB - P_1B$ et $P_1P_2 = P_1B - P_2B$. De la proportion (c'est-à-dire l'égalité de rapports) donnée, il suit par substitution que
$$\frac{AB - P_1B}{AB} = \frac{P_1B - P_2B}{P_1B}.$$
On a donc
$$\frac{AB}{AB} - \frac{P_1B}{AB} = \frac{P_1B}{P_1B} - \frac{P_2B}{P_1B},$$
c'est-à-dire
$$1 - \frac{P_1B}{AB} = 1 - \frac{P_2B}{P_1B}.$$
La proportion désirée résulte par simplification.

b) Il s'agit maintenant de montrer l'implication réciproque de celle donnée en a), c'est-à-dire
$$\frac{P_1B}{AB} = \frac{P_2B}{P_1B} \Rightarrow \frac{AP_1}{AB} = \frac{P_1P_2}{P_1B}.$$
On sait donc par hypothèse que
$$\frac{P_1B}{AB} = \frac{P_2B}{P_1B}.$$
En soustrayant chacune de ces deux fractions d'un « 1 » bien choisi — on peut s'inspirer à cet égard de la démonstration de la partie a) —, la proportion recherchée,
$$\frac{AP_1}{AB} = \frac{P_1P_2}{P_1B},$$
suit directement.

4. *Voir par exemple le problème 8-e accompagnant le texte « Émergence logarithmique : tables et calculs »,* Accromath *vol. 14, hiver-printemps 2019, p. 32.*

Note 3 :

On pourrait faire appel à une notation un peu allégée pour reprendre l'équivalence découlant des deux parties de ce problème dans le cadre d'une *arithmétique des proportions*. Soit donc quatre réels a, b, c et d (avec b, $d \neq 0$); on a alors

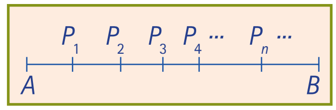
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d}.$$

La direction ($\Rightarrow$) se montre par soustraction, à partir d'un « 1 » bien choisi, de l'un et l'autre rapport donnés — elle correspond à la partie b) du problème; et la direction ($\Leftarrow$), par simplification de chacun des deux membres de la proportion — c'est la partie a). [Le problème porte de fait sur le cas particulier où $a = d$.]

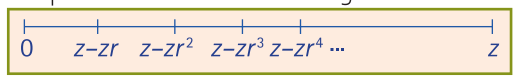
5. Suite de segments

a) Par commodité, on pose $P_0 = A$.
On rappelle tout d'abord que $P_0A = AB = z$.
Du rapport $\frac{P_1B}{AB} = r$ (voir texte p. 22), il suit que $P_1B = r \times AB = rz$, et donc que la distance de P_1 à l'extrémité B est donnée par zr. Bref, on a $P_1B = zr$.
De même, on tire de $\frac{P_2B}{P_1B} = r$ que $P_2B = r \times P_1B = r(zr)$, et donc $P_2B = zr^2$.
Plus généralement, on montre de même que $P_nB = zr^n$.
La suite décroissante $z, zr, zr^2, zr^3, ...$ correspond donc aux distances à l'extrémité B des positions successives du point P ($P_0, P_1, P_2, P_3, ...$) — c'est-à-dire, revenant aux segments géométriques, la suite des longueurs des segments P_0B, P_1B, P_2B, P_3B, ... Il s'agit clairement d'une suite géométrique de rapport r.

b) Il est utile, dans un premier temps, de situer chacun des points P_i par rapport à A. S'appuyant sur le fait que le segment P_nB est de longueur zr^n (partie a), on observe tout d'abord que
- le point P_1 est à une distance $z - zr$ de l'extrémité A,
- le point P_2 est à une distance $z - zr^2$ de l'extrémité A,
- le point P_3 est à une distance $z - zr^3$ de l'extrémité A, etc.



Comme le segment AB est de longueur z, il est commode ici de considérer un segment de la droite numérique réelle ayant son extrémité gauche à l'origine et de longueur z. On marque sur ce segment les points correspondant aux diverses positions $P_1, P_2, P_3, P_4, ...$ du point P, en indiquant leur distance de l'origine.



Les intervalles (géométriques) AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... qui font l'objet de cette question peuvent donc, du point de vue de leur longueur, se ramener aux intervalles (numériques) suivants :

$[0, z - zr]$, $[z - zr, z - zr^2]$, $[z - zr^2, z - zr^3]$,
$[z - zr^3, z - zr^4]$, ...

On en conclut alors que
- l'intervalle AP_1 est de longueur $z(1 - r)$,
- l'intervalle P_1P_2 est de longueur
$$(z - zr^2) - (z - zr),$$
c'est-à-dire $zr(1 - r)$,
- l'intervalle P_2P_3 est de longueur
$$(z - zr^3) - (z - zr^2),$$
c'est-à-dire $zr^2(1 - r)$, etc.

Les longueurs des segments AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ..., à savoir

$z(1 - r)$, $zr(1 - r)$, $zr^2(1 - r)$, $zr^3(1 - r)$, ...,

forment donc elles aussi une suite géométrique décroissante dont le rapport est r. On notera que le $n+1^e$ segment, P_nP_{n+1}, a pour longueur un certain multiple — à savoir le produit par $(1 - r)$ — de la distance zr^n de son extrémité gauche au point B.

Note 4 :

Identifiant à nouveau un segment avec sa longueur, on vient donc de montrer d'une part que $P_nP_{n+1} = zr^n(1 - r)$, et d'autre part que $P_nB = zr^n$. Il s'ensuit donc que

$$\frac{P_nP_{n+1}}{P_nB} = 1 - r.$$

Or cette égalité exprime le fait suivant : la distance parcourue par P en n'importe quel intervalle de temps est proportionnelle à la distance séparant P de sa cible B au début de cet intervalle de temps, la constante de proportionnalité étant égale à $1-r$. Mais le cœur de cette observation est précisément le point de départ de la démarche de Napier, alors qu'il suppose que les points A, P_1, P_2, P_3, ... P_n, ..., B sont tels que

$$\frac{AP_1}{AB}=\frac{P_1P_2}{P_1B}=\frac{P_2P_3}{P_2B}=\frac{P_3P_4}{P_3B}=\cdots$$

(voir le texte d'*Accromath*, p. 22).

Note 5 :

On pourrait revenir ici aux notations « allégées » de la note 3 ci-haut. On vérifie alors qu'étant donné quatre réels a, b, c et d (avec b, $d \neq 0$), on a

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Leftrightarrow \frac{b-a}{b}=\frac{d-c}{d}=1-k.$$

Pour montrer la direction ($\Rightarrow$), on posera $a = bk$ et $c = dk$. Et pour la direction ($\Leftarrow$), on procède par simplification.

Le cas dont il est question dans le présent problème est celui où $a = d$ et $k = 1 - r$ (et donc $r = 1 - k$).

---

c) On est donc ici dans le cas où la longueur de AB est $z = 10^7$, et où le rapport de la suite géométrique AB, P_1B, P_2B, P_3B, ... est

$r = 0{,}999\,999\,9 = 1 - 10^{-7} = 1 - 1/z$,

le nombre choisi par Napier comme étant inférieur à 1, mais très près de 1 — bien sûr en lien avec son choix de la longueur de AB.

i) On s'intéresse donc dans un premier temps à la suite P_0B, P_1B, P_2B, P_3B, ... (où $P_0 = A$). Or on sait par la partie a) que

$$P_nB = zr^n = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n.$$

On est donc bel et bien en présence d'une suite géométrique décroissante, de premier terme $AB = P_0B = 10^7$ et de rapport

$r = 1 - 10^{-7}$.

Chacun des termes de la suite AB, P_1B, P_2B, P_3B, ... est donc légèrement plus court que le précédent : partant d'un premier segment de longueur $10^7 = 10\,000\,000$, chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme qui le précède par

$$\frac{9\ 999\ 999}{10\ 000\ 000}.$$

ii) On a montré en b) que la longueur de l'intervalle P_nP_{n+1} est donnée par le produit de la longueur de P_nB par $(1 - r)$. Or on a ici, en vertu des données de Napier,

$1 - r = 1 - (1 - 10^{-7}) = 10^{-7}$.

Il s'ensuit donc

$$P_nP_{n+1} = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n \times \frac{1}{10^7} = \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n.$$

On est encore en présence d'une suite géométrique décroissante, dont le premier terme est $AP_1 = P_0P_1 = 1$ et elle aussi de rapport $r = 1 - 10^{-7}$.

Chacun des termes de la suite AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... est donc légèrement plus court que le précédent : partant du premier segment AP_1 de longueur 1, chaque terme de la suite est obtenu en multipliant par 0,999 999 9 (le r choisi par Napier) le terme qui le précède.

Note 6 :

Il suit immédiatement des commentaires de la partie c) qu'avec les données de Napier, on a

$$\frac{P_nP_{n+1}}{P_nB}=\frac{1}{10^7}.$$

Une telle égalité exprime (à nouveau) le fait que la distance parcourue par P, en toute période de temps, est proportionnelle à la distance séparant P de sa cible B au début de cette période de temps. Avec les données choisies par Napier, la constante de proportionnalité est égale à 10^{-7}. Cette observation est un cas particulier du $1 - r$ de la note 4, et on a

$$\frac{AP_1}{AB}=\frac{P_1P_2}{P_1B}=\frac{P_2P_3}{P_2B}=\frac{P_3P_4}{P_3B}=\cdots=\frac{1}{10^7}.$$

À chaque intervalle de temps, le point P parcourt donc

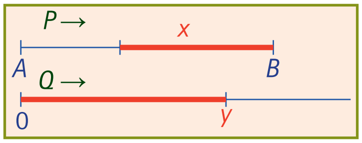
$$\frac{1}{10\ 000\ 000}$$

de la distance qu'il lui reste à franchir vers le point B.

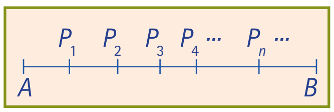
---

d) Il est important de rappeler ici que les points P et Q se déplacent selon les mêmes intervalles de temps, et avec la même vitesse initiale 10^7. La vitesse de Q demeure constante tout le long du parcours, tandis que celle de P décroît géométriquement.

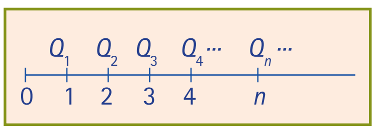
Que dire maintenant de ces intervalles de temps? D'un certain point de vue, le temps « coule continûment », comme le suggère la figure suivante (tirée du texte, p. 22).



Mais sur le plan pratique, le temps s'égrène par « pas », compte tenu de l'objectif de Napier de se doter d'une table renfermant une liste (finie) de valeurs logarithmiques. C'est là qu'interviennent les différentes positions du point P,



et les positions corrrespondantes de Q :



On vient de voir (note 6) que le trajet parcouru par P à chaque intervalle de temps vaut un dix-millionième de la distance qui le sépare de B (au début de cet intervalle de temps). Appliquons cette observation au tout premier mouvement de P, depuis $P_0 = A$ à P_1. Il franchit alors un dix-millionième de la longueur de AB, qui vaut justement dix millions. Autrement dit, il franchit une distance de 1 (voir à la partie c-ii le fait que le segment AP_1 est de longueur 1).
Or la vitesse de P est elle aussi, par hypothèse, de 10^7 à ce moment-là. C'est donc dire que le premier déplacement de P a pris un temps d'un dix-millionième. Et par hypothèse, cet intervalle de temps demeure le même tout le long du processus!
Au départ, le point Q est précisément sous les mêmes conditons que P. Il franchit donc lui aussi une distance de 1 durant le premier intervalle de temps. La vitesse de Q étant constante, et les intervalles de temps étant tous égaux, c'est donc dire que chaque étape du processus fait faire un « + 1 » à Q. Le mouvement de Q est donc bel et bien de la forme

$$0, 1, 2, 3, ..., n, ...$$

Note 7 :

Les commentaires qui précèdent pourraient se résumer comme suit. Posant $z = 10^7$, les séries géométrique et arithmétique associées aux mouvements de P et de Q sont alors respectivement de la forme suivante :

$$\begin{array}{cccccc} z, & z\left(1-\frac{1}{z}\right), & z\left(1-\frac{1}{z}\right)^2, & \cdots, & z\left(1-\frac{1}{z}\right)^n, & \cdots \\ 0, & 1, & 2, & \cdots, & n, & \cdots \end{array}$$

Et on a bien que le logarithme (à la Napier) de

$$P_nB = z\left(1-\frac{1}{z}\right)^n$$

est n.

---

6. Propos de Napier

a) Considérons deux intervalles quelconques, P_iP_{i+1} et P_jP_{j+1}, déterminés par les positions P_i et P_j du point P le long du segment AB, et appelons d_i et d_j les longueurs respectives de ces intervalles.
Comme, en vertu de l'hypothèse de base de Napier, ces deux distances sont parcourues dans un même temps, disons t, on a donc $d_i = v_it$ et $d_j = v_jt$, où on désigne par v_i et v_j les vitesses de P respectivement sur l'intervalle P_iP_{i+1} et l'intervalle P_jP_{j+1}. Il suit alors que
$$\frac{d_i}{d_j} = \frac{v_it}{v_jt} = \frac{v_i}{v_j},$$
c'est-à-dire que les distances sont dans le même rapport que les vitesses, tel que mentionné dans l'énoncé.
Or en vertu des hypothèses mêmes de Napier, on a que
$$\frac{P_iP_{i+1}}{P_iB} = \frac{P_jP_{j+1}}{P_jB} \qquad (¶)$$
et donc $\dfrac{d_i}{d_j} = \dfrac{P_iP_{i+1}}{P_jP_{j+1}} = \dfrac{P_iB}{P_jB}$,

d'où il suit immédiatement que

$$\frac{v_i}{v_j} = \frac{P_iB}{P_jB}.$$

Il s'ensuit donc que les longueurs des intervalles donnés — de même que les vitesses sur ces intervalles — sont dans le même rapport que les distances restant alors à parcourir jusqu'au point B.

On en tire un autre rapport, à savoir

$$\frac{v_i}{P_iB} = \frac{v_j}{P_jB} = k,$$

pour une certaine constante k, et ce quels que soient i et j — c'est-à-dire quels que soient les positions P_i et P_j considérées —, puisque la proportion (¶) demeure valide pour toutes les valeurs des paramètres i et j.

Pour tout point P_i, la vitesse v_i du point P sur l'intervalle P_iP_{i+1} est donc de la forme $v_i = k \times P_iB$, pour une même constante k s'appliquant à toute valeur de i. La vitesse du point P sur l'intervalle P_iP_{i+1} est bel et bien proportionnelle à la distance de l'extrémité gauche de cet intervalle au point B, tel que demandé, et ce, avec une même constante de proportionnalité s'appliquant pour tous les i.

Note 8 :

On observera qu'il découle des commentaires qui précèdent que

$$\frac{d_i}{P_iB} = \frac{d_j}{P_jB} = k,$$

pour la même constante k dont il y est question. Autrement dit, la constante exprimant le rapport de la *distance* parcourue par P, le long de l'intervalle P_iP_{i+1}, à la distance séparant P_i de B, est la même que celle qui exprime le rapport de la *vitesse* de P sur cet intervalle à la distance séparant P_i de B.

b) On sait de la partie a) que pour tout temps $t = i$, on a que $v_i = k \times P_iB$ pour une constante k indépendante de i. Il s'agit donc de montrer qu'en vertu des valeurs numériques choisies par Napier, cette constante de proportionnalité k est forcément 1.

Regardant cette égalité au temps $t = 0$, on a donc $v_0 = k \times P_0B$. Or par hypothèse, la vitesse initiale v_0 de P — c'est-à-dire sa vitesse sur le premier intervalle $P_0P_1 = AP_1$ — est 10^7. De plus la distance alors à parcourir est donnée par $P_0B = AB = 10^7$. Ces deux valeurs numériques, rappelons-le, sont celles choisies par Napier. Il s'ensuit donc que la constante de proportionnalité ici en jeu est $k = 1$. Et ce pour tout temps t.

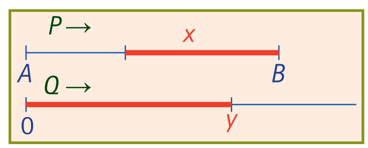
On en conclut donc de manière générale que

$$v_t = P_tB$$

(en tant que nombres), où on désigne ici par v_t la vitesse de P au temps t, et par P_t sa position au temps t le long du segment AB.

Dit autrement, la vitesse du point P est un temps donné est représentée par la même valeur numérique que la distance qui sépare alors P de l'extrémité B du segment AB. (Voir, dans le texte d'*Accromath*, la note infrapaginale #15, page 23.)

7. Les déplacements des points P et Q sont représentés dans la figure qui suit.



On travaille avec le fait que la vitesse (instantanée) v d'une particule ayant parcouru une distance s en un temps t est donnée par la dérivée de s par rapport à t :

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

a) On sait, en vertu des hypothèses de Napier, que le point Q se déplace à une vitesse constante $v_Q = 10^7$. Il s'ensuit donc immédiatement, la vitesse de Q étant la dérivée par rapport au temps de la distance $y(t)$ parcourue par ce point au temps t, que

$$\frac{dy}{dt} = 10^7.$$

Par ailleurs, au temps $t = 0$, Q n'a pas encore entamé son trajet, de sorte que par hypothèse on a $y(0) = 0$.

b) On considère cette fois le point P qui se déplace, depuis A vers B, le long du segment AB de longueur 10^7 de manière telle sa vitesse au temps t est proportionnelle à la distance $x(t)$ qui le sépare alors de B. Or on a vu (problème

#6-b) que les valeurs numériques choisies par Napier entraînent que la vitesse de P au temps t est de fait égale à $x(t)$.

Pour pouvoir parler de cette vitesse de P au temps t, il nous faut considérer le parcours accompli par P à ce moment depuis le point A, qui est donné par l'expression $10^7 - x$ (où x représente $x(t)$). Dérivant cette expression par rapport à t, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(10^7 - x\right) = -\frac{dx}{dt},$$

qui représente donc la vitesse v_P du point P au temps t. En vertu des hypothèses de travail de Napier, cette vitesse est égale à x, la distance depuis la position de P jusqu'à l'extrémité B. Il s'ensuit alors que

$$\frac{dx}{dt} = -x,$$

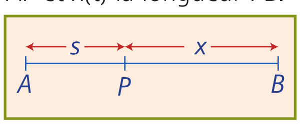
tel que stipulé dans l'énoncé du problème.

En lien avec la condition initiale, notons simplement qu'au temps $t = 0$, la distance à parcourir par P est toute la longueur du segment AB, de sorte que $x(0) = 10^7$.

Note 10 :

Il est possible d'aborder cette question sans faire appel au problème #6-b et en gérant les valeurs numériques choisies par Napier directement dans le présent problème.

Étant donné la position du point P le long du segment AB en un temps t quelconque, appelons $s(t)$ la longueur AP et $x(t)$ la longueur PB.



On a donc que $s + x = 10^7$. La vitesse de P au temps t est obtenue en dérivant par rapport à t la variable s, qui correspond au chemin parcouru. Et cette vitesse est connue comme étant proportionnelle à x. Appelant k la constante de proportionnalité en jeu, on a donc

$$v_P = \frac{ds}{dt} = kx.$$

Mais que dire de cette constante k? Regardant la situation de P au temps $t = 0$, on a alors $v_P = 10^7$, $s = 0$ et $x = 10^7$, de sorte que l'égalité précédente se ramène à

$$10^7 = k \times 10^7,$$

ce qui entraîne que $k = 1$. Revenant à l'équation différentielle qui précède, on a ainsi

$$\frac{d}{dt}\left(10^7 - x\right) = x,$$

d'où il suit que

$$\frac{dx}{dt} = -x.$$

c) i) Soit donc $y(t)$, la fonction correspondant à la position du point Q au temps t. L'équation différentielle donnée,

$$\frac{dy}{dt} = 10^7,$$

peut se résoudre en séparant les variables et en intégrant de chaque côté de l'égalité. On obtient ainsi

$$\int dy = \int 10^7 dt,$$

d'où il suit

$$y = 10^7 t + C.$$

La condition initiale $y(0) = 0$ entraîne que $C = 0$, de sorte que la solution recherchée est $y(t) = 10^7 t$. La première équation différentielle a donc une solution linéaire.

ii) On recherche maintenant la fonction $x(t)$ exprimant la distance entre P et B au temps t. L'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

peut elle aussi être traitée par séparation des variables. De

$$\frac{1}{x}dx = -dt,$$

on obtient

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int dt,$$

et donc

$$\ln(x) = -t + C,$$

où ln désigne le logarithme naturel (de base e).

Passant en exponentielle, il s'ensuit alors que

$$x = e^C e^{-t}.$$

Appliquant la condition initiale $x(0) = 10^7$, on trouve que $e^C = 10^7$ (ou si on préfère $C = \ln(10^7)$), d'où il suit que la solution est

$$x(t) = 10^7 e^{-t}.$$

Ainsi, la solution de la seconde équation différentielle est de forme exponentielle.

d) Étant donné un réel (positif ou nul) x, considérons son logarithme y tel que défini par Napier — on a donc $y = \text{Nlog}(x)$. Les sous-questions précédentes ont permis l'introduction d'un outillage moderne dans lequel figurent le logarithme naturel, de base e. Nous sommes ainsi en position pour introduire (un peu artificiellement...) une idée de base dans le cadre mis en place par Napier.

À partir de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -x,$$

nous avons obtenu à la partie c-ii) l'expression

$$\ln(x) = -t + C$$

avec $C = \ln(10^7)$. Isolant la variable t, on trouve alors

$$t = \ln(10^7) - \ln(x) = \ln\left(\frac{10^7}{x}\right).$$

Par substitution dans l'expression $y(t) = 10^7\, t$ obtenue en c-i), on trouve

$$\text{Nlog}(x) = y = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right).$$

Le logarithme de x, tel que défini par Napier, est donc une expression faisant intervenir un logarithme naturel, c'est-à-dire de base e, mais en fonction de l'inverse de x.

Si on préfère, utilisant le fait que

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = -\ln\left(\frac{v}{u}\right),$$

on peut réécrire l'égalité précédente sous la forme

$$\text{Nlog}(x) = -10^7 \ln\left(\frac{x}{10^7}\right).$$

Faisant alors appel à l'égalité $\log_b u = -\log_{1/b} u$ (*n'est-ce pas?*), on obtient finalement

$$\text{Nlog}(x) = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right),$$

que l'on pourrait même réécrire comme

$$\text{Nlog}(x)\frac{1}{10^7} = \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right).$$

On voit ainsi que le logarithme de x défini par Napier revient au logarithme de x en base e^{-1} — moyennant des divisions par la fameuse constante 10^7, ce qui consiste tout bonnement, au plan pratique, à déplacer le point décimal.

Note 11 :

Insistons à nouveau sur le fait que faire intervenir ici une base pour étudier le logarithme de Napier n'est qu'une façon de parler : il n'y a aucune idée de base qui intervient dans la démarche de Napier pour définir le logarithme!

Notons aussi que l'expression *logarithme népérien*, parfois utilisée[5] pour désigner le logarithme naturel de base e, peut être vue comme un bel hommage au rôle fondamental joué par Napier dans le développement du concept de logarithme. Mais le logarithme naturel en tant que tel est absent des travaux de Napier.

Note 12 :

Voici un autre regard (intuitif) sur la présence dans ces propos de la base $1/e$.

Il est bien connu que la base e des logarithmes naturels est définie par l'égalité

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Dans les commentaires qui suivent, nous acceptons le fait (peut-être un peu moins familier) que[6]

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

On a vu à la question 5-c) que les segments P_nB, qui composent la suite géométrique décroissante sur lesquels s'appuient les logarithmes de Napier, sont de la forme

5. *Voir à ce propos la note infrapaginale #12, p. 6, dans : Jérôme Camiré-Bernier et Bernard R. Hodgson, « Émergence logarithmique : tables et calculs. »* Accromath, *vol. 14, hiver-printemps 2019, pp. 2-7.*

6. *Ce résultat pourrait se voir comme un cas particulier du fait que la fonction exponentielle e^x, pour x réel, peut se définir comme suit :*

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Une telle vision de e^x remonte à Euler, dans le chapitre 7 de son Introductio in analysin infinitorum *(1748).*

$$P_nB = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n.$$

Par ailleurs, le point Q se déplace selon une suite arithmétique telle qu'au temps n, il est rendu en $Q_n = n$ (voir problème 5-d).

Divisons maintenant chacun des termes de ces deux suites (géométrique et arithmétique) par 10^7. On voit, en posant $n = 0$, qu'au terme 1 de la suite découlant de P correspond le terme 0 de la suite découlant de Q. C'est donc comme si 0 était devenu le « logarithme » de 1. Par ailleurs, en posant $n = 10^7$, au terme

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \qquad (\S)$$

de la suite découlant de P correspond le terme 1 de la suite découlant de Q. Autrement dit, 1 est le « logarithme » du nombre (§).

Or par les remarques qui précèdent, le nombre (§) peut être vu comme une approximation intéressante de e^{-1}. Faisant maintenant appel au concept (moderne) de base de logarithme, cela revient donc à dire que les logarithmes tels qu'introduits par Napier, lorsque modifiés de la manière que nous venons de décrire, se comportent comme des logarithmes en base $1/e$.

Ces commentaires ne constituent évidemment pas une « preuve », mais le lien pouvant ainsi être établi entre l'expression de $1/e$ comme une limite d'une part, et les quantités intervenant dans les calculs de Napier d'autre part, peut être en soi intéressant.