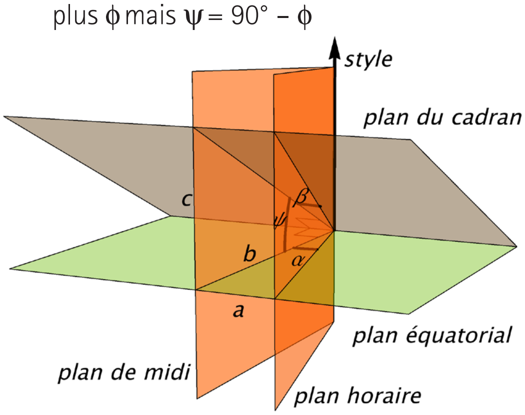
Été-automne 2015 Solutions

Cadran solaire

1. Cadran solaire horizontal à Woburn, Qc
   a) Un plan horizontal en un lieu donné est un plan tangent à la sphère en ce point. Donc, il fait un angle de ϕ avec l'axe des pôles. Une deuxième manière de s'en convaincre est de se rappeler que le style fait un angle de $90° - \phi$ avec le plan d'un cadran vertical. Donc, il fait un angle de ϕ avec un plan horizontal.
   b) On raisonne comme pour le cadran vertical, la seule différence étant que l'angle entre le plan équatorial et le plan du cadran n'est plus ϕ mais $\psi = 90° - \phi$



.

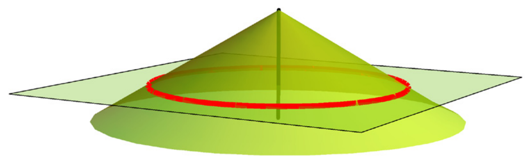
On avait obtenu

$$\tan\beta = \tan\alpha\cos\phi.$$

En remplaçant ϕ par $\psi = 90° - \phi$, on obtient

$$\tan\beta = \tan\alpha\cos(90° - \phi) = \tan\alpha\sin\phi.$$

2. Le style étant perpendiculaire à l'axe des pôles, il fait un angle de 90° avec le plan du cadran. Lorsque le soleil tourne autour de la Terre (dans le repère centré au centre de la Terre !), il décrit un cône dont l'axe est perpendiculaire au plan du cadran. L'intersection du cône avec le plan du cadran est donc un cercle.



3. Si ϕ est la latitude du cadran, nous avons vu que le cadran fait un angle de $\psi = 90° - \phi$ avec le plan équatorial, donc un angle de $\beta = \phi$ avec l'axe du cône d'ombre. De plus, si δ est la déclinaison, alors l'angle au sommet du cône est 2θ, où $\theta = 90° - \delta$.

   On applique le critère de l'article :
   - Si $\beta < \theta$, alors l'intersection est une branche d'hyperbole.
   - Si $\beta = \theta$, l'intersection est une parabole.
   - Si $\beta > \theta$, alors l'intersection est une ellipse.

   On a donc, en considérant les deux hémisphères :
   - une branche d'hyperbole, si $|90° - \phi| > |\delta|$;
   - une parabole, si $|90° - \phi| = |\delta|$;
   - une ellipse, si $|90° - \phi| < |\delta|$;

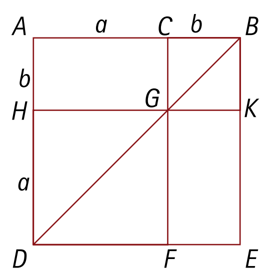
   Puisque la déclinaison ne dépasse pas 23,5° en valeur absolue, alors on est limité à une branche d'hyperbole (et le cas limite d'une droite) entre les deux cercles polaires, soit $|\phi| < 66{,}5°$. Par contre, on peut observer toute la panoplie des coniques dans les régions polaires.

Géométrie intégrale

1. La position de l'aiguille est donnée par la distance r de son centre à la ligne la plus proche et son angle θ avec la direction perpendiculaire aux lignes. On a donc
$$r \in \left[0, \frac{d}{2}\right] \text{ et } (\theta,\, r) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
Une position aléatoire de l'aiguille correspond à un point quelconque (θ, r) du rectangle
$$S = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{d}{2}\right].$$
L'aiguille coupe une droite si
$$r < \frac{\ell}{2} \cos\theta.$$
Le sous-ensemble A des points $(\theta,\, r)$ de S satisfaisant à cette condition est l'ensemble des points situés sous la courbe
$$r = \frac{\ell}{2} \cos\theta.$$
L'aire de A est donnée par
$$\text{aire}(A) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ell}{2} \cos\theta \, d\theta = \ell.$$
La probabilité P cherchée est donc
$$P = \frac{\text{aire}(A)}{\text{aire}(S)} = \frac{\ell}{\pi d/2} = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

La rhétorique mathématique d'Archimède

1. Nous proposons une démonstration qui suit de près celle donnée par Euclide dans ses *Éléments*.



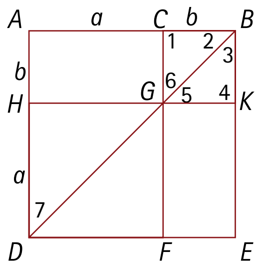
La proposition 4 du Livre II des *Éléments* est énoncée comme suit par le géomètre grec :
Si une droite est coupée au hasard, le carré sur la droite entière est égal aux carrés sur les segments et deux fois le rectangle contenu par les segments.

Il s'agit donc d'un énoncé de nature géométrique, portant sur l'aire d'un certain « grand » carré, qui se ramène à la somme des aires de deux carrés (un « moyen » et un « petit ») et de deux rectangles.

L'élément de départ est le segment de droite AB, qui a été coupé en un point C. Considérant le carré $ABED$ (de côté AB), Euclide affirme que son aire est égale aux aires des carrés $HGFD$ et $CBKG$ (de côté respectif AC et CB), auxquelles on ajoute le double de l'aire du rectangle $ACGH$ (de côtés AC et CB). Autrement dit, appelant a et b les longueurs des segments AC et CB, l'affirmation d'Euclide, en notation algébrique moderne, revient à
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$
On voit bien, sur la figure, le carré $ABED$ partagé en quatre régions contiguës ($HGFD$, $CBKG$, $ACGH$ et $GKEF$) et donc que l'aire du carré est la somme des aires de ces régions. Mais il faut s'assurer que nous sommes bel et bien en présence de deux carrés (« moyen » et « petit ») et de deux rectangles égaux. Cela renvoie à la question : comment la figure a-t-elle été construite au juste ?

L'argument proposé par Euclide repose sur des résultats établis au Livre I de ses *Éléments* à propos de triangles isocèles et d'angles déterminés par des droites parallèles coupées par une sécante. À cette fin, étant donné le carré $ABED$, il introduit la diagonale BD, puis trace CF parallèle à AD. Par le point G, intersection de CF et BD, il trace ensuite HK parallèle à AB. Il s'intéresse dans un premier temps aux deux *parallélogrammes* ($HGFD$ et $CBKG$) construits « autour » de la diagonale BD et veut montrer qu'il s'agit de deux carrés. Il est utile, pour la discussion qui suit, de numéroter certains des angles de notre figure.

Comme CF est parallèle à AD, on a que les angles 6 et 7 sont congruents (en tant qu'angles correspondants). Mais le triangle ABD étant isocèle, les angles 2 et 7 sont congruents, de sorte que $\angle 2 \cong \angle 6$. Le triangle CBG est donc lui aussi isocèle.



Or $CBKG$ est un parallélogramme, de sorte que CB et GK sont congruents, de même que CG et BK. Autrement dit, le quadrilatère $CBKG$ est équilatéral.

Mais il est de plus équiangulaire. En effet, les droites CG et BK étant parallèles, l'angle 1 est congruent aux angles 2 et 3 pris ensemble. Ces derniers formant un angle droit, il en est de même de l'angle 1. Le parallélisme de CB et de GK, entraîne par ailleurs que l'angle 4 est lui aussi droit. On en conclut finalement que le quadrilatère équilatéral $CBKG$ est également rectangle, et donc un carré.

On montre, exactement de la même manière, que le parallélogramme $HGFD$ est lui aussi un carré.

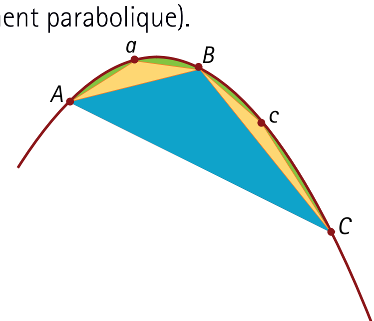
Enfin, il suit de la discussion qui précède que les deux *parallélogrammes* $ACGH$ et $GKEF$ sont rectangles (car CF et HK sont parallèles aux côtés du carré de base, de sorte que les angles droits se propagent partout), et aussi qu'ils sont congruents l'un avec l'autre.

Note 1 : Sans suivre ici l'argument d'Euclide dans tous ses détails, nous en sommes néanmoins restés assez près, visant ainsi à illustrer l'approche mise de l'avant dans son traité. Les *Éléments* d'Euclide ont exercé une influence considérable au fil des siècles sur les « mathématiques occidentales » — entendre, les mathématiques développées selon la méthode et l'esprit grecs, c'est-à-dire selon le modèle aristotélicien (voir la discussion aux pp. 20-21 de l'article d'*Accromath*).

On voit combien une preuve « sans mots » — comme celle qui y est suggérée à la p. 21 de l'article — contient de sous-entendus qui demandent à être explicités si on veut vraiment s'assurer de la validité de l'argument visuel. Dans le cas qui nous intéresse ici, la question fondamentale est de savoir comment les deux droites CF et HK ont été obtenues. Acceptant qu'elles ont été tracées parallèlement aux côtés du carré $ABED$, on voit aussitôt les angles droits de ce carré se propager un peu partout dans les coins des quatre « tuiles » intérieures, créant ainsi deux carrés et deux rectangles qui, pris ensemble, recouvre le carré initial. La congruence des deux rectangles résulte immédiatement de la symétrie de la figure.

Jean-Paul Delahaye, dans son article « Preuves sans mots » (*Accromath*, vol. 3, hiver-printemps 2008, pp. 14-17), présente des commentaires fort instructifs à propos de la notion de preuve visuelle.

2. a) Soit le segment parabolique déterminé par une parabole coupée par une droite AC. La construction géométrique mise en place par Archimède introduit une famille de polygones inscrits $\mathcal{P}_i$, avec $\mathcal{P}_1 = ABC$, $\mathcal{P}_2 = AaBcC$, etc. (voir pp. 22-23 — $\mathcal{P}_1$ est donc le triangle ABC d'aire maximale contenu dans le segment parabolique).



En vertu de la proposition 21 du traité d'Archimède (que nous tenons ici pour acquise sans justification), le passage de $\mathcal{P}_1$ à $\mathcal{P}_2$ fait intervenir deux petits triangles ABa et BCc tels que l'aire de chacun vaut le huitième de l'aire du triangle de départ ABC. Il est donc clair que l'ajout fait en passant à $\mathcal{P}_2$ vaut le quart du triangle de départ, c'est-à-dire que

$$\text{aire}(\mathcal{P}_2) - \text{aire}(\mathcal{P}_1) = \frac{1}{4}\,\text{aire}(ABC).$$

Examinons maintenant le passage de $\mathcal{P}_2$ à $\mathcal{P}_3$. Il s'agit somme toute de refaire la même démarche avec cette fois les deux segments paraboliques déterminés respectivement par les cordes *AB* et *BC*. Il est donc maintenant question de l'ajout de quatre nouveaux triangles, de base respective *Aa*, *aB*, *Bc et cC*. Les deux premiers triangles, dans le segment parabolique de base *AB*, valent donc le quart de l'aire du triangle *ABa*, tandis que les deux autres, dans le segment de base *BC*, valent le quart de l'aire du triangle *BCc*. Au total, on a donc

$$\begin{aligned}\text{aire}(\mathcal{P}_3)-\text{aire}(\mathcal{P}_2)&=\frac{1}{4}\text{aire}(ABa)+\frac{1}{4}\text{aire}(BCc)\\&=\frac{1}{4}\left(\text{aire}(ABa)+\text{aire}(BCc)\right).\end{aligned}$$

Or les deux triangles *ABa* et *BCc*, pris ensemble, correspondent à l'ajout lors du passage de $\mathcal{P}_1$ à $\mathcal{P}_2$; il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned}\text{aire}(\mathcal{P}_3)-\text{aire}(\mathcal{P}_2)&=\frac{1}{4}\left(\text{aire}(\mathcal{P}_2)-\text{aire}(\mathcal{P}_1)\right)\\&=\frac{1}{4^2}\text{aire}(ABC).\end{aligned}$$

De manière générale, étant donné le polygone inscrit $\mathcal{P}_k$, considérons la « croûte », formée de 2^{k-1} triangles, qui vient le couronner. En passant à $\mathcal{P}_{k+1}$, chacun de ces triangles génère deux nouveaux triangles constituant un ajout quatre fois plus petit que le triangle donné. Prise globalement, la croûte permettant d'obtenir $\mathcal{P}_{k+1}$ vaut donc le quart de la croûte précédente. Dit autrement, l'ajout fait à une étape donnée du processus géométrique vaut le quart de l'ajout de l'étape précédente, c'est-à-dire

$$\text{aire}(\mathcal{P}_{k+1})-\text{aire}(\mathcal{P}_k)=\frac{1}{4}\left(\text{aire}(\mathcal{P}_k)-\text{aire}(\mathcal{P}_{k-1})\right).$$

On en conclut donc que

$$\text{aire}(\mathcal{P}_{k+1})-\text{aire}(\mathcal{P}_k)=\frac{1}{4^k}\text{aire}(ABC).$$

Note 2 : La proposition 21 du traité *La quadrature de la parabole* se lit comme suit : *Si, dans un segment délimité par une droite et une parabole, l'on inscrit un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et si, dans les segments restants, l'on inscrit d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments, le triangle inscrit dans le segment entier sera octuple de chacun des triangles inscrits dans les segments qui restent à l'entour.*

Autrement dit, tel qu'affirmé à la p. 22 de l'article d'*Accromath*, l'aire de chacun des triangles *Aba* et *BCc* vaut le huitième du triangle de départ *ABC*. Les deux triangles *ABa* et *BCc* couronnant le triangle *ABC* sont donc de même aire. De là, il s'ensuit, de proche en proche, que les triangles formant une croûte donnée, dans le passage d'un polygone inscrit au suivant, sont eux aussi tous de même aire (proportionnelle à l'aire du triangle *ABC*). Ce constat pourrait mener à une variante de la preuve précédente : le passage de $\mathcal{P}_k$ à $\mathcal{P}_{k+1}$ repose sur l'ajout de 2^{k-1} triangles, l'aire de chacun valant $(1/8)^k$ de l'aire du triangle *ABC*. On en tire directement l'aire de l'ajout effectué lors de ce passage est

$$\frac{1}{4^k}\text{aire}(ABC).$$

b) Comme le polygone inscrit $\mathcal{P}_{k+1}$ peut être vu comme formé du triangle de départ *ABC* auquel ont été ajoutées des couches successives de petits triangles, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\text{aire}(\mathcal{P}_{k+1})&=\text{aire}(ABC)+\frac{1}{4}\text{aire}(ABC)\\&\quad+\frac{1}{4^2}\text{aire}(ABC)+\ldots+\frac{1}{4^k}\text{aire}(ABC)\\&=\text{aire}(ABC)\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^k}\right).\end{aligned}$$

Faisant appel aux résultats usuels sur les sommes de progressions géométriques finies, on en tire alors

$$\begin{aligned}\text{aire}(\mathcal{P}_{k+1})&=\text{aire}(ABC)\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)\\&=\frac{4}{3}\text{aire}(ABC)\left(1-\frac{1}{4^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

Note 3 : On savait à l'époque d'Archimède comment évaluer l'aire du polygone $\mathcal{P}_{k+1}$. Un résultat que l'on retrouve chez Euclide montre en effet comment évaluer la somme d'une telle progression géométrique finie. Mais il ne serait pas question pour autant, pour les contemporains d'Archimède, d'en tirer l'aire du segment parabolique par un « passage à la limite » comme nous le ferions tout naturellement aujourd'hui. Le mathématicien du 21e siècle voit tout de suite comment, en partant de la dernière égalité pour l'aire de $\mathcal{P}_{k+1}$, on peut en tirer l'aire du segment parabolique en faisant « tendre vers l'infini » le paramètre k. Mais chez les Grecs de l'Antiquité, cela ne se fait tout simplement pas (à tout le moins, pas dans l'espace public...).

Les anciens Grecs étaient en effet familiers avec les notions de progression (ou suite) *arithmétique* et *géométrique*. Dans le premier cas, il s'agit d'une suite de nombres tels que chacun d'eux (à l'exception du premier) est égal au précédent augmenté d'un nombre constant (appelé la *raison* de la progression).[1] Et dans l'autre, il est question du précédent multiplié par un nombre constant.

À la proposition IX.35 de ses *Éléments*, Euclide établit un résultat, énoncé sous une forme plutôt alambiquée, dont l'interprétation en notation moderne est que la progression géométrique (finie) a, ar, ar^2, ... , ar^n a pour somme

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = a\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}. \quad (*)$$

(On suppose ici bien sûr que $r \neq 1$.) Appliquant ce résultat au cas du polygone $\mathcal{P}_{k+1}$ (avec $n = k$, a = aire(ABC) et $r = 1/4$), on retrouve ainsi l'expression donnée plus haut et exprimant son aire.

À noter que pour Euclide, ce résultat prépare le terrain pour la célèbre proposition IX.36, où il vient brillamment clore ce troisième et dernier Livre de ses *Éléments* consacré à la théorie des nombres en montrant que si $2^n - 1$ est premier, alors le nombre $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait.

1. *Observons au passage que les progressions arithmétiques sont intimement liées à la notion de* nombre figuré, *un sujet de prédilection depuis au moins les mathématiques pythagoriciennes.*

Note 4 : Si l'énoncé (et la démonstration!) de la proposition IX.35 des *Éléments* d'Euclide ne sont pas des plus simples, notons que l'égalité de la ligne (*) se démontre fort aisément dans un contexte moderne. Posant en effet

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n, \qquad (**)$$

on a alors, multipliant chaque membre de l'égalité par r,

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n+1},$$

d'où il suit par télescopage, soustrayant les deux égalités membre à membre,

$$rS_n - S_n = ar^{n+1} - a,$$

c'est-à-dire

$$S_n(r-1) = a(r^{n+1} - 1).$$

Posant $r \neq 1$, le résultat (*) suit aussitôt.

Note 5 : Notons que l'égalité (**) peut mener à une autre vision de la somme d'une série géométrique. Cette égalité peut en effet se récrire, par mise en évidence de r,

$$\begin{aligned} S_n &= a + r\left(a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}\right) \\ &= a + rS_{n-1}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une formule dite *récursive* pour la somme S_n, celle-ci étant exprimée en fonction de la somme précédente, S_{n-1} (ainsi que des paramètres a et r). La notion d'*algorithme récursif*, c'est-à-dire d'algorithme faisant appel à lui-même, a un caractère fondamental en informatique.

(L'égalité de la ligne (*) est parfois appelée *formule close*, ou *formule de forme fermée*, pour la somme d'une série géométrique, la somme S_n étant exprimée directement en fonction des paramètres a et r.)

3. La démonstration de cette affirmation que présente Archimède est toute simple — mais plutôt astucieuse! — et tient en quelques lignes.
   Notons d'abord respectivement a_2, ... , a_n le tiers des A_2, ... , A_n. Et ne perdons pas de vue que selon la donnée de ce problème (voir l'article d'*Accromath* à la p. 24), chaque A_i est le quadruple du suivant :

$$A_1 = 4A_2,\ A_2 = 4A_3,\ \dots,\ A_{n-1} = 4A_n.$$

Un calcul élémentaire montre que

$$A_2 + a_2 = \frac{1}{3}A_1, \dots A_n + a_n = \frac{1}{3}A_{n-1},$$

et par conséquent,

$$A_2 + a_2 + \dots + A_n + a_n = \frac{1}{3}(A_1 + \dots + A_{n-1}).$$

Or, il se trouve que par définition,

$$a_2 + \dots + a_{n-1} = \frac{1}{3}(A_2 + \dots + A_{n-1}).$$

Dès lors, une simple soustraction donne

$$A_2 + \dots + A_n + a_n = \frac{1}{3}A_1,$$

d'où le résultat suit directement :

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_1,$$

Note 6 : Le texte original de la proposition 23, dans le traité *La quadrature de la parabole*, se lit comme suit :

> *Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande.*

Or dans sa démonstration, Archimède prend des grandeurs disposées en une suite décroissante où chacune est le quadruple de la suivante. Il s'agit donc, en notation moderne, d'une série géométrique de raison 1/4, et c'est ainsi que nous avons voulu aborder la proposition 23 dans le cadre ce problème, restant très près de la démarche d'Archimède (sauf pour la notation avec indices a_i et A_i).

Note 7 : La démonstration qui précède peut sembler un peu tirée par les cheveux, les quantités a_i, chacune valant *le tiers* du A_i correspondant, semblant venir de nulle part...

Des commentaires sur les visions intuitives que peut receler cette manipulation formelle sont présentés dans la section *Intuition et rigueur chez Archimède* de l'article d'*Accromath* (pp. 24-25). À noter que la figure accompagnant l'argument d'Archimède pour sa proposition 23, sur laquelle est basée l'enchaînement de figures de la p. 25, suggère géométriquement qu'il y a un intérêt à porter l'attention sur le tiers des quantités dont on fait la somme. Ces fameux « un tiers » — les a_i — ne sont finalement peut-être pas si artificiels que cela...

Note 8 : La relation entre les A_i, dans la démonstration qui précède, peut s'exprimer comme suit :

$$A_2 = \frac{1}{4}A_1, A_3 = \frac{1}{4}A_2 = \frac{1}{4^2}A_1, \dots$$
$$A_n = \frac{1}{4}A_{n-1} = \frac{1}{4^{n-1}}A_1.$$

En utilisant une notation moderne, l'égalité en cause dans le problème 3 peut alors se récrire

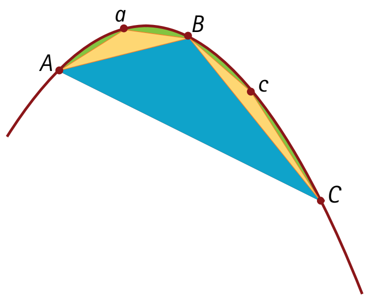
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^k}A_1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}A_1 = \frac{4}{3}A_1.$$

Et elle découle directement de l'expression pour la somme d'une série géométrique mentionnée à la note 3 — voir l'égalité (*). On a en effet

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^k}A_1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}A_1 &= A_1\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}A_1\\ &= A_1\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right)\\ &= \frac{4}{3}A_1.\end{aligned}$$

4. La technique mise en œuvre par Archimède dans sa démonstration de la proposition 24 est typique de l'« école mathématique grecque » — et de la manière de faire du grand Syracusain en particulier. Afin de démontrer que les deux quantités S et K sont égales, il procède par *double raisonnement par l'absurde*, montrant que chacune des deux inégalités $S < K$ et $S > K$ mène à une contradiction.
Soit donc $AaBcC$, une région délimitée par une droite et une parabole et ABC, un triangle de mêmes base et hauteur que le segment parabolique. Afin de simplifier la notation, appelons S l'aire du segment parabolique et posons

$$K = \frac{4}{3}\text{aire}(ABC).$$



• Cas 1 : $S > K$

Que le segment *AaBcC* soit plus grand que les quatre tiers du triangle, s'il se peut (c'est-à-dire $S > K$). Inscrivons d'abord les triangles *ABa* et *BCc* dans la parabole en suivant le procédé décrit précédemment. Répétons cette astuce dans les segments paraboliques successivement obtenus, jusqu'à ce que les parties négligées par le polygone ainsi formé soient plus petites que l'excédent dont l'aire de la parabole *AaBcC* dépasse les quatre tiers du triangle. Cela est possible en vertu de la proposition 20 — voir à ce sujet la section *L'approche archimédienne* dans l'article d'*Accromath*, pp. 23-24. Et appelons P l'aire de ce polygone tel que $S - P < S - K$.

Il s'ensuit que le polygone formé des triangles est plus grand que les quatre tiers du triangle *ABC* — autrement dit $P > K$. Or cela est impossible, car en vertu de la proposition 23, l'aire du polygone, une somme finie de triangles inscrits dans une série géométrique de raison quatre, doit être inférieure aux quatre tiers du premier triangle, ici ce même triangle *ABC* (voir le problème 3). De ce fait, le segment parabolique ne peut être plus grand que les quatre tiers du triangle *ABC* et l'inégalité $S > K$ se trouve ainsi rejetée.

• Cas 2 : $S < K$

Supposons, dans un deuxième temps, que le segment parabolique *AaBcC* est plus petit que les quatre tiers du triangle (c'est-à-dire $S < K$). La différence $K - S$ est donc positive.

Posant A_1 = aire(*ABC*), introduisons des quantités A_2, A_3, … , chacune valant le quart de la précédente, jusqu'à ce qu'on atteigne un A_k tel que $A_k < K - S$. Combinant la proposition 23 et le fait que $K = \frac{4}{3}\text{aire}(ABC) = \frac{4}{3}A_1$, on a alors

$$A_1 + A_2 + ... + A_k + \frac{1}{3}A_k = \frac{4}{3}A_1 = K.$$

Il suit de cette égalité que

$$K - (A_1 + A_2 + ... + A_k) = \frac{1}{3}A_k < A_k.$$

Mais comme on sait que $A_k < K - S$, il s'ensuit donc que

$$K - (A_1 + A_2 + ... + A_k) < K - S,$$

c'est-à-dire

$$A_1 + A_2 + ... + A_k > S.$$

Mais cette dernière inégalité est impossible. En effet, le membre de gauche peut être vu comme l'aire du polygone $\mathcal{P}_k$ inscrit dans le segment parabolique selon la construction géométrique d'Archimède (on utilise ici le fait que A_1 = aire(*ABC*) et que chaque A_i est le quadruple du suivant). Le membre de gauche est donc forcément, de ce fait, strictement inférieur à S, l'aire du segment parabolique entier.

L'inégalité $S < K$ se trouve ainsi elle aussi rejetée, ce qui conclut la preuve par double contradiction.

Note 9 : On notera que la même technique de double *reductio ad absurdum*, c'est-à-dire de preuve par double contradiction, a été mise en œuvre par Archimède à la proposition 1 de son traité *De la mesure du cercle*, lorsqu'il démontre que l'aire d'un cercle peut s'exprimer comme le produit de son rayon et de son demi-périmètre. L'égalité de ces deux quantités découle du fait que, dans un premier temps, la supposition que la première est inférieure à l'autre est contradictoire; et que, dans un deuxième temps, supposer la première supérieure à l'autre mène aussi à une contradiction. On consultera à ce sujet le texte de Marie-France Dallaire et Bernard R. Hodgson, « Regard archimédien sur le cercle : quand la circonférence prend une bouffée d'aire. » *Accromath*, vol. 8, hiver-printemps 2013, pp. 32-37.