Section problèmes

Élections

Montrer que la dictature d'un électeur satisfait aux trois axiomes d'unanimité, de transitivité et d'indépendance des alternatives non pertinentes.

Codes correcteurs

Chaque livre a un code ISBN composé de 13 chiffres de $\{0,1,\ldots,9\}$:

ISBN $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}$,

où a_{13} est choisi tel que

$$b = a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}+a_{13} +3(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12})$$

soit divisible par 10.

a) Montrer que ce code détecte une erreur.

b) Montrer que ce code détecte l'inversion de deux chiffres adjacents lorsqu'ils ne diffèrent pas d'un multiple de 5.

c) Trouver le dernier chiffre du code ISBN commençant par

ISBN 978-0-387-69212- ?.

Glanures mathématico-littéraires

1. **L'axiomatique de Hilbert**

David Hilbert (1862-1943) a proposé en 1899 de nouveaux fondements axiomatiques de la géométrie euclidienne[1]. Cette axiomatisation, qui a connu au fil des ans quelques variantes (notamment par Hilbert lui-même), comprend 20 axiomes, dont les trois mentionnés dans le texte (p. 27).

En prenant appui sur les deux premiers de ces axiomes, montrer que deux droites coplanaires distinctes ont en commun soit un seul point, soit aucun.

2. **L'axiomatique de Peano**

Giuseppe Peano (1858-1932) a introduit en 1889 des axiomes servant de fondement aux nombres naturels et aux opérations arithmétiques élémentaires[2]. Comme dans toute axiomatique, on y trouve des « choses » non définies : *nombres naturels*, *zéro* (désigné par 0) et *successeur* (représenté par le symbole prime, '). La notation $n \in \mathbb{N}$ peut se lire « n est un nombre naturel ».

La portée de ces trois termes primitifs est cernée par cinq axiomes, qui visent à capturer l'intuition de ce qu'est l'ensemble $\mathbb{N}$.

Les cinq axiomes de Peano

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. si $n \in \mathbb{N}$, alors $n' \in \mathbb{N}$;
3. 0 n'est pas le successeur d'un naturel;
4. si $n' = m'$, alors $n = m$;
5. si un ensemble E de naturels est tel que $0 \in E$, et que $n \in E$ entraîne $n' \in E$, alors $E = \mathbb{N}$.

Des axiomes 1 et 3 découle que 0 est en quelque sorte le point de départ des naturels. Les axiomes 2 et 4 disent que la notion de successeur (') peut être vue comme une fonction injective sur $\mathbb{N}$. Enfin l'axiome 5 est le célèbre *principe de récurrence* dans les naturels[3].

Les axiomes de Peano permettent de définir par récurrence les opérations d'*addition* et de *multiplication* de naturels (voir encadré), et d'établir leurs propriétés fondamentales.

Pour alléger l'écriture, on conviendra de poser 0' = 1, 1' = 2, etc.

a) En prenant appui sur les axiomes de Peano, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n' \neq n$.

b) Calculer $3+2$; $2+3$; 0×3.

c) Montrer que $n + 1 = n'$ et $1 + n = n'$.

(NB : On n'a pas encore la commutativité de l'addition...)

d) Montrer que $0 + n = n$ et $0 \times n = 0$.

e) Montrer que $n \times 1 = n$ et $1 \times n = n$.

f) Montrer que $2\times 2 = 2 + 2$.

g) Montrer que $n \times 2 = n + n$.

h) Que dire de $2 \times n$?

i) Montrer que l'addition est associative et commutative.

L'addition et la multiplication à la Peano

Si m est un naturel, on pose

- A1 : $m + 0 = m$;
  A2 : $m + n' = (m + n)'$.
- M1 : $m \times 0 = 0$;
  M2 : $m \times n' = (m \times n) + m$.

1. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Hilbert.

2. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Peano.

3. *Voir André Ross, « Preuves par récurrence. »* Accromath, *vol. 3, hiver-printemps 2008, pp. 26-27. Voir aussi le solutionnaire des problèmes d'*Accromath, *vol. 14, hiver-printemps 2019.*