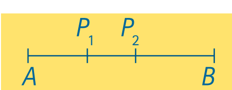
Section problèmes

Archimède, *L'Arénaire*

Si des nombres sont continûment en proportion à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera, dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et il sera éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité.

À propos de Napier

Puisque des distances parcourues dans des temps égaux sont dans le même rapport que les vitesses, il s'ensuit que la vitesse du point P sur chaque intervalle est proportionnelle à la distance de l'extrémité gauche de cet intervalle au point B. (p. 22)



Algorithmes dans l'histoire

1. Déterminer les PGCD des couples :

   a) 924, 3 135 c) 2 530, 9 639

   b) 83, 337

L'héritage de Fermat

1. Appliquer la méthode de Fermat pour factoriser les nombres suivants :

   a) 493 b) 1247 c) 6 903

2. Supposons qu'un entier n est le produit de deux nombres premiers $p < q$ et que $q - p < 2\sqrt{2p}$. Montrer qu'en utilisant la méthode de Fermat, ce nombre n peut être factorisé en seulement une étape.

Émergence logarithmique

1. Soit la suite arithmétique $(a + nd)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a) Montrer que chaque terme (à l'exception du premier) est la moyenne arithmétique de ses deux voisins.

   b) Montrer un résultat analogue pour la suite géométrique $(ar^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer qu'en termes modernes, le passage de *L'Arénaire* ci-haut porte sur les notions de suites arithmétique et géométrique, et sur la règle du produit de deux puissances.

   Tuyau : Des nombres « continûment en proportion à partir de l'unité » forment une suite géométrique dont le premier terme est 1.

3. En comparant les deux tables tirées de la tablette MLC 02078 (pp. 19 et 20), on y voit la suite géométrique,

   $$2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64$$

   être associée à deux suites arithmétiques. Relier directement ces deux suites arithmétiques l'une à l'autre.

   Tuyau : On peut y voir du logarithme.

4. Soit deux points P_1 et P_2 sur un segment AB (voir figure). Montrer que :

   a) si $\dfrac{AP_1}{AB} = \dfrac{P_1P_2}{P_1B}$, alors $\dfrac{P_1B}{AB} = \dfrac{P_2B}{P_1B}$;

   b) la réciproque est elle aussi valide.

5. La suite de segments AB, P_1B, P_2B, P_3B, ... forme une progression géométrique décroissante (p. 22). On désigne par r le rapport de cette suite géométrique (on a donc $r < 1$) et par z la longueur du segment AB.

   a) Interpréter en termes de z et de r les segments AB, P_1B, P_2B, P_3B, ...

   b) Exprimer à l'aide de z et de r les longueurs des intervalles AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 ...

   c) Appliquer ces résultats aux valeurs numériques choisies par Napier (voir p. 23).

   d) Et que dire dans ce contexte de la suite arithmétique déterminée par le mouvement du point Q (p. 22)?

6. a) Expliquer l'observation dans l'encadré ci-bas, au cœur de la démarche de Napier.

   b) En conclure que pour Napier, la vitesse de P en un point donné est égale à sa distance de l'extrémité B.

   Tuyau : La constante de proportionnalité de la partie a) est 1.

7. On veut interpréter ici le modèle géométrico-cinématique de Napier à l'aide du calcul différentiel et intégral (moderne). On appelle $x(t)$ la distance séparant P de l'extrémité B au temps t, et $y(t)$ la position du point Q au temps t.

   a) Montrer que le déplacement de Q est décrit par l'équation différentielle $dy/dt = 10^7$, avec comme condition initiale $y(0) = 0$.

   Tuyau : La vitesse est la dérivée de la distance parcourue par rapport au temps.

   b) Montrer de même que le déplacement de P est décrit par $dx/dt = -x$, avec $x(0) = 10^7$.

   c) Résoudre ces deux équations différentielles.

   d) Montrer comment on pourrait en tirer une notion de « base » pour les logarithmes de Napier[1].

1. *Au plan historique, une telle idée de « base » chez Napier est une pure fabulation.*