Comment les mathématiques ont toujours su se trouver un premier ou second rôle dans les films américains.

Les mathématiques @

Samuel Goyette
Université de Sherbrooke

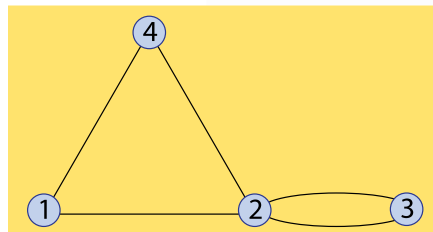
Une définition peu formelle des mathématiques serait de dire que les mathématiques offrent des outils pour résoudre des problèmes. Par contre, pour les cinéastes, les mathématiques ne résolvent pas de problèmes, mais elles sont tout de même importantes pour eux. Par exemple, si un personnage est bon en mathématiques, c'est une façon rapide de dire au public que ce personnage est intelligent.

Dans les pages qui suivent, nous verrons si les mathématiques dans les films sont rigoureuses ou si elles n'existent que pour embellir l'écran.

Will Hunting : un concierge pas comme les autres

Un des films les plus célèbres mettant en scène un mathématicien est *Le Destin de Will Hunting* (v.o. : *Good Will Hunting*). Dans ce film, Will Hunting est un concierge qui possède un don pour les mathématiques. Malgré le fait que le film est un drame, il y a tout de même des équations en abondance pour un œil averti. L'homme derrière ces mathématiques est Patrick O'Donnell, un professeur de physique à l'Université de Toronto. Non seulement était-il responsable de s'assurer que le dialogue mathématique soit le plus réaliste possible, mais il était aussi responsable d'écrire les équations et les graphiques sur les tableaux noirs. C'est d'ailleurs lui qui a composé deux des problèmes mathématiques les plus célèbres du cinéma. Commençons par le premier problème que Will résout en secret. Selon le professeur dans ce film, il s'agit d'un problème très difficile et une personne capable de le résoudre mérite gloire et fortune. Il ne s'agit cependant que d'une exagération hollywoodienne. Voici le problème.

Dans le graphe ci-dessous :



Graphe présenté dans
Le destin de Will Hunting

a) Trouver la matrice d'adjacence A du graphe.

b) Trouver la matrice donnant le nombre de chemins de longueur 3.

c) Trouver la fonction génératrice des chemins de i vers j.

d) Trouver la fonction génératrice des chemins de 1 vers 3.

Le premier problème dans le film porte sur la théorie des graphes. Qu'est-ce qu'un graphe ? Il s'agit d'une collection de sommets (que l'on peut voir comme des points ou des nœuds) qui sont reliés entre eux par des arêtes (des segments de droite). Par exemple, la figure précédente montre un graphe avec quatre sommets (en bleu) reliés entre eux par 5 arêtes (en noir). Pour encoder la connectivité d'un graphe, on utilise la matrice d'adjacence du graphe, c'est-à-dire la matrice dont l'élément $(i; j)$ est le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j. Par exemple, dans le graphe précédent deux arêtes relient les sommets 2 et 3, donc on aura 2 aux positions (2; 3) et (3; 2) de la matrice A. Compléter le reste de la matrice A est un exercice simple et on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tout ce qu'il nous manque pour résoudre la deuxième question est de savoir ce qu'est un chemin. C'est simplement une façon de relier deux sommets du graphe en passant par ses arêtes.

Un chemin de longueur 3 entre le sommet 1 et le sommet 2 est une façon de passer du sommet 1 au sommet 2 en utilisant 3 arêtes (on peut utiliser plusieurs fois la même arête). Dans le graphe présenté dans le film, il y a 2 chemins de longueur 3 entre les sommets 1 et 2 et il y a 2 chemins de longueur 3 reliant les sommets 1 et 3. La matrice donnant le nombre de chemins de longueur 3 a en position $(i; j)$ le nombre de chemin de longueur 3 reliant les sommets i et j. Nous pourrions calculer ces nombres de chemins à la main, mais cette méthode est risquée et assez longue. Heureusement, nous disposons d'une astuce pour aller plus vite. En effet, si nous observons bien la matrice A, il s'agit de la matrice donnant le nombre de chemin de longueur 1. Il est donc très intuitif de multiplier la matrice A par elle-même 2 fois pour obtenir la matrice donnant le nombre de chemin de longueur 3. Nous rappelons rapidement que l'élément $(i; j)$ issu du produit entre deux matrices A et B est le produit scalaire entre la i-ème ligne de A et la j-ème ligne de B. Je laisse le soin au lecteur de s'assurer que A^3 est bel et bien :

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

La troisième question est une question difficile à résoudre et nécessite quelques manipulations qui ne sont pas intuitives. Nous présentons les grandes lignes de la solution dans l'encadré *Fonction génératrice des chemins*. Pour la quatrième question, il suffit de poser $i = 1$ et $j = 3$ dans la réponse à la troisième question.

Fonction génératrice des chemins

Dans le film, Will représente par $\omega_n(i \rightarrow j)$ le nombre de chemin de longueur $n > 1$ reliant i à j. Dans le graphe du film, il n'y a aucun chemin de longueur 1 reliant les sommet 1 et 3 donc $\omega_1(1 \rightarrow 3) = 0$. Il y a deux chemins de longueur 2 et deux chemins de longueur 3 reliant ces mêmes sommets, d'où $\omega_2(1 \rightarrow 3) = \omega_3(1 \rightarrow 3) = 2$. Si on continue l'exercice en prenant des valeurs croissantes de n, on obtient la suite suivante :

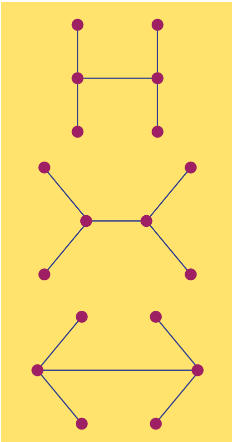
0, 2, 2, 14, 18, 94, 146, 638, ...

La fonction génératrice de cette suite est notée $\Gamma^{\omega}(1 \rightarrow 3, z)$ et on peut la représenter par la somme suivante :

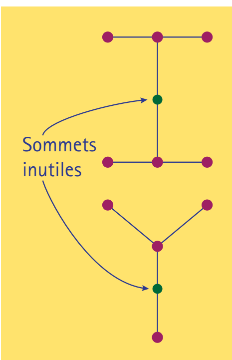
$$\begin{aligned}\Gamma^{\omega}(1 \rightarrow 3, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(1 \rightarrow 3) z^n \\ &= 0 + 2z + 2z^2 + 14z^3 + 18z^4 + 94z^5 + \cdots\end{aligned}$$

Cette fonction génératrice est la réponse à la quatrième question. La difficulté de la troisième question est de trouver une façon générale d'obtenir la fonction génératrice entre n'importe quels sommets i et j, et ce, sans avoir à utiliser les puissances de A. Il s'agit d'un résultat remarquable qui utilise les propriétés du déterminant d'une matrice, d'inverse d'une matrice ainsi que des astuces avec les sommes géométriques. Ces développements étant assez longs et complexes, nous nous contenterons d'admirer la réponse de Will qui est la suivante :

$$\begin{aligned}\Gamma^{\omega}(i \rightarrow j, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(i \rightarrow j) z^n \\ &= (-1)^{i+j} \frac{\det(\infty_{ij} - zA_{ij})}{\det(\infty - zA)}.\end{aligned}$$



Arbres homéomorphes à 6 sommets

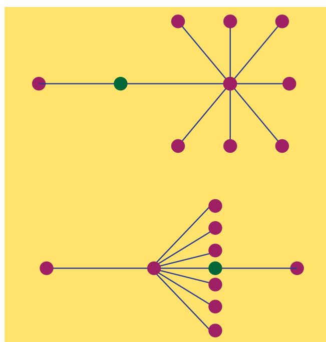


Arbres réductibles

Will résout ensuite un autre problème sur le même tableau noir. Voici le problème :

Dessiner tous les arbres homéomorphiquement irréductibles de taille $n = 10$.

La principale difficulté derrière cette question est le vocabulaire. Une fois le jargon démystifié, un néophyte peut être accompagné vers la solution. Tout d'abord, nous pouvons considérer qu'un arbre est la même chose qu'un graphe (une collection de sommets et d'arêtes). Par exemple, à la figure qui suit, nous avons deux arbres de taille 10 (c'est-à-dire 10 sommets). Si on revient à la question, cela signifie que nous cherchons des arbres avec 10 sommets. Deux arbres sont homéomorphes si on peut passer de l'un à l'autre sans briser ou décoller des arêtes. Par exemple, les deux arbres suivants sont homéomorphes :



Arbres homéomorphes de taille 10

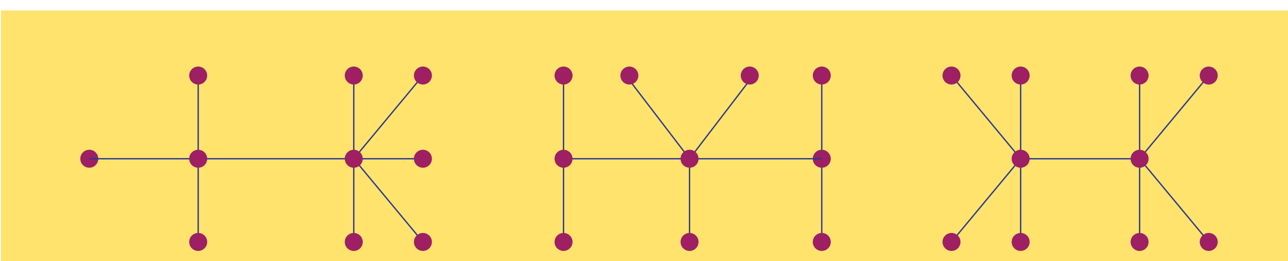
On peut passer d'un arbre à l'autre seulement grâce à des rotations d'arêtes. Il semblerait que les deux arbres de taille 10 précédents soient donc candidats comme réponse au problème. Cependant, la formulation du problème est trompeuse. Un arbre «irréductible» est un arbre qui n'a pas de sommet inutile, soit un sommet qui est relié à d'autres sommets par seulement deux arêtes. Par exemple, les arbres précédents n'étaient pas irréductibles, car les sommets verts étaient inutiles. Ils ne sont donc pas candidats pour la réponse finale.

Donc on pourrait reformuler la question de façon plus simple :

Dessiner tous les arbres de dix sommets non-homéomorphes et sans sommet inutile.

Trois de ces arbres sont présentés en bas de la page, je laisse au lecteur le loisir de trouver les sept autres.

Les mathématiques de *Good Will Hunting* sont donc assez accessibles. Il s'agit simplement de démystifier le jargon pour se rendre compte que Will n'est pas un génie, mais plutôt quelqu'un qui est capable de lire des livres élémentaires de mathématiques. Existe-t-il des films avec des mathématiques plus complexes ?



Arbres homéomorphes et irréductibles de taille 10

John Nash : un homme d'exception

Le film *Un homme d'exception* (v.o. : *A beautiful mind*) relate la vie du mathématicien et économiste John Nash. Contrairement à Will Hunting qui était un personnage de fiction, John Nash est non seulement une vraie personne, mais il était vivant lors du tournage du film. La responsabilité du consultant en mathématiques du film, David Bayer, était donc bien plus grande. Tel un acteur qui s'immerge dans un rôle, David Bayer s'est immergé dans les mathématiques de John Nash. Les mathématiques que l'on peut voir à l'écran sont ainsi des problèmes qui correspondent à ce qui était fait à l'époque et à ce que faisait John Nash.

Par exemple, dans plusieurs scènes nous voyons John Nash écrire sur des fenêtres (ce qui ne s'est jamais produit en réalité). Sur une des fenêtres on peut voir $0 \leq \pi \leq 1$. Cela peut sembler une erreur grave, puisque $\pi = 3{,}14159$, ce qui est clairement plus grand que 1. Or, $0 \leq \pi \leq 1$ est une référence directe à un article de Nash qui s'était donné comme objectif d'utiliser les 24 lettres grecques comme différentes variables. Dans cet article il a défini π comme une variable dont la valeur est comprise entre 0 et 1. Le film est rempli de petites perles du genre.

Parlons maintenant de théorie des jeux. Dans une des scènes du film, John Nash découvre ce que l'on appelle aujourd'hui l'*équilibre de Nash*[1]. Dans la scène, John est au bar avec ses collègues et une femme aux cheveux blonds accompagnée d'amies aux cheveux bruns arrive au bar. Un débat commence pour savoir qui va partir avec la blonde. Nash a alors une révélation et dit :

Si nous essayons tous de séduire la blonde, nous nous nuisons mutuellement et personne d'entre nous ne va partir avec elle. Nous nous tournerons alors vers ses amies qui, vexées d'être des deuxièmes choix, nous rejetteront aussi. Voici ce qu'il faut faire: personne d'entre nous ne va vers la blonde. Ainsi, nous ne nous nuisons pas mutuellement et les femmes brunes ne se sentent pas insultées.

Adam Smith pensait que si chacun s'occupe de son intérêt personnel, tout le monde est gagnant. C'est incomplet. La meilleure stratégie est celle qui avantage le joueur et qui avantage le groupe.

Certes ce dialogue ne semble pas très mathématique, mais nous pouvons utiliser ce qui est dit pour introduire certains concepts de la théorie des jeux. L'idée que chaque joueur doit considérer la meilleure action pour lui et le groupe est l'idée de la thèse doctorale de John Nash. Pour l'étudier, posons un jeu très simple et tâchons de trouver la meilleure stratégie pour un joueur donné.

Trois joueurs se battent pour une mise de X $. Ils doivent simultanément afficher 1 ou 2 doigts.

- Si un seul joueur affiche 1 doigt, il gagne 1 $ de la mise.
- Si un seul joueur affiche 2 doigts, il gagne 4 $ de la mise.
- Si tous les joueurs affichent le même nombre de doigts, personne ne gagne, (ou chacun reçoit 0 $).

1. *Voir également l'article de Marlène Frigon, « Existe-t-il une stratégie gagnante ? »,*

Il y a donc 4 combinaisons possibles de doigts (les permutations ne sont pas pertinentes dans cet exemple) :

(1; 1; 1), (2; 2; 2), (1; 2; 2) et (2; 1; 1).

Quelle est la meilleure stratégie pour un joueur ? Combien de doigts un joueur devrait-il afficher en jouant ce jeu lors d'un tour donné ? Il y a plusieurs réponses à cette question, mais nous nous contenterons d'étudier l'équilibre de Nash.

Qu'est-ce qu'un équilibre de Nash ? Retournons à notre exemple pour en déduire une définition. Dans notre exemple, (1; 2; 2) et (2; 1; 1) sont des dispositions qui correspondent à des équilibres de Nash. Dans ces situations, un des joueurs gagne une certaine somme et donc le groupe (l'ensemble des trois joueurs) gagne. Cependant, (1; 1; 1) et (2; 2; 2) ne sont pas des équilibres de Nash. En effet, ces configurations amènent de la déception à tous les joueurs, le groupe ne fait aucun profit. Donc dans un jeu de ce genre, un équilibre de Nash est une configuration dont le groupe sort gagnant.

Supposons que nous faisions plus qu'un tour de ce jeu, c'est-à-dire que nous jouions à répétition, quelle stratégie correspondrait à l'équilibre de Nash ? Il faudrait que les trois joueurs affichent 1 doigt une fois sur trois et 2 doigts deux fois sur trois. Cette stratégie assurerait un gain moyen de 0,44$ par tour. Donc le groupe fait un certain profit à chaque tour.

Dans la théorie des jeux, un jeu comme le précédent est un jeu à stratégie mixte. Chaque joueur choisit parmi différentes options de manière aléatoire (ici 1 ou 2 doigts), mais avec une probabilité fixe de choisir une option particulière (donc 1/3 ou 2/3 dans notre exemple).

Le résultat que John Nash a démontré dans sa thèse est que l'on peut toujours trouver un équilibre de Nash dans les jeux à stratégie mixte. Ce résultat est très important en mathématiques, mais aussi en économie. La bourse ou la course à l'armement représentent deux exemples très concrets de jeux qui auront toujours un équilibre de Nash.

Les mathématiques, toujours dans les drames ?

Comme nous l'avons dit plus tôt, les mathématiques sont un outil pour le réalisateur qui sert à communiquer de l'information sur les personnages. Les deux films dont nous avons discuté parlent de génie troublé. Les mathématiques sont-elles donc seulement utilisées pour faire le portrait de ce type de personnage ? Bien sûr que non ! Les mathématiques sont utilisées dans tous les genres possibles.

Des mathématiques dans un film pour enfant ?

Je vous encourage à regarder *Donald au pays des mathémagies* (v.o. : *Donald in Mathmagic land*). Un film de Disney des années 50 dans lequel Donald Duck se promène dans un monde où les mathématiques sont expliquées aux enfants. La suite de Fibonacci, le théorème et la musique de Pythagore, le nombre d'or ainsi que le billard font partie des sujets abordés. Le film est fort plaisant, mais contient son lot « d'erreurs mathématiques » et d'erreurs historiques (peut-être que ces erreurs ont été laissées dans le produit final pour ne pas perdre le jeune public). Malgré tout, le film reste amusant et probablement efficace pour éveiller une curiosité mathématique chez les plus jeunes.

Des mathématiques dans une comédie ?

Allez regarder les sketchs d'Abbott et Costello ! Probablement le duo d'humoristes le plus populaire des années 50 aux États-Unis, ils n'hésitaient pas à utiliser les mathématiques pour faire des blagues. Dans un de leur numéro (que l'on peut facilement trouver en ligne), on peut voir Lou Costello démontrer de trois façons différentes à son propriétaire que $7 \times 13 = 28$. Très rares seraient les humoristes d'aujourd'hui qui feraient un numéro de cinq minutes sur une preuve mathématique erronée.

Des mathématiques dans un film d'action ?

Une journée en enfer (v.o. : *Die hard with a vengeance*) saura vous satisfaire. Dans ce film le vilain pose une énigme aux héros : deux contenants d'eau sont à leur disposition ; un de 5 L et un de 3 L. Comment produire exactement 4 L d'eau ? On suppose que les deux contenants peuvent être remplis grâce à une fontaine. Bien évidemment, une bombe explosera si aucune solution n'est trouvée. Dans le film, le héros a besoin de deux minutes. Saurez-vous être plus rapide que lui ?

Conclusion

Malgré le fait que les mathématiques sont souvent en arrière-plan dans les films, elles sont souvent basées sur des théories très intéressantes. Je vous encourage à être attentifs lorsque vous croisez des mathématiques dans un film, car il s'agit souvent de bonnes introductions à plusieurs champs de recherches. Tout comme le cinéma, la télévision regorge de petites perles mathématiques. Des émissions commes *Les Simpsons* ou *The Big Bang Theory* sont remplies de mathématiques.

John Forbes Nash Jr. (1928-2015)

Fils d'un ingénieur, John Nash Sr., et d'une enseignante, Virginia Martin, le mathématicien et économiste John Nash est né à Bluefield en Virginie-Occidentale. Dès son jeune âge, il lisait beaucoup et faisait des expériences dans sa chambre convertie en laboratoire.

À partir de 14 ans, il développe un intérêt pour les mathématiques et, souhaitant faire une carrière d'ingénieur comme son père, il étudie au Carnegie Institute of Technology de 1945 à 1948. Il s'intéresse alors à la théorie des nombres, aux équations diophantiennes, à la mécanique quantique, à la théorie de la relativité et en particulier à la théorie des jeux.

En 1948, il entre à l'Université de Princeton. Sa thèse, soutenue en 1950, portait sur *Les jeux non coopératifs*. Il y pose la définition et décrit les propriétés de ce qui, aujourd'hui, est appelé *l'équilibre de Nash*. On lui doit également d'importants résultats en géométrie différentielle en lien avec les variétés riemanniennes.

Nash reçoit le prix Nobel d'économie en 1994 et le prix Abel en 2015.