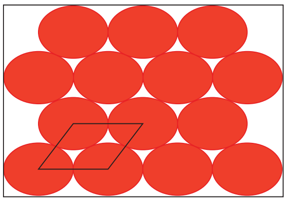
Section problèmes

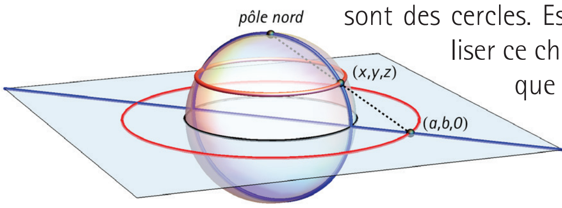
Le meilleur empilement



1. On considère l'empilement d'ellipses de demi-axes a et b. Montrer que cet empilement a la densité $d_2 = \pi/2\sqrt{3}$, indépendamment de a et b.

Fibration de Hopf

1. Convainquez-vous que le cylindre infini est aussi une surface fibrée avec un cercle comme base B et une droite $\mathbb{R}$ comme fibre F.
2. Obtenir les coordonnées de la projection stéréographique du point $(x, y, z) \in S^2$ sur le plan $z = 0$.
3. La première figure de l'article montre une fibration du tore où la base et la fibre sont des cercles. Est-il possible d'utiliser ce choix de fibres plutôt que les cercles de Villarceau pour obtenir une autre fibration de S^3 ?



Le cas Archimède

1. De nombreuses preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ procèdent par l'absurde, où l'on suppose au contraire que $\sqrt{2} = a/b$, avec a et b des entiers. On peut alors travailler à partir de l'égalité $a^2 = 2b^2$, cherchant à montrer que le carré d'un entier ne peut jamais être le double du carré d'un autre entier.

   a) Supposant de plus la fraction a/b irréductible, conclure en examinant la parité des deux entiers en cause. (C'est l'argument le plus connu, présenté dans *Accromath*, vol. 2, été-automne 2007, p. 22.)

   b) Le raisonnement peut aussi se faire en considérant les factorisations premières de a et de b. (Il n'est plus nécessaire alors de supposer la fraction irréductible.)

   c) Retrouver le même résultat en regardant le chiffre des unités dans les développements décimaux de a et de b.

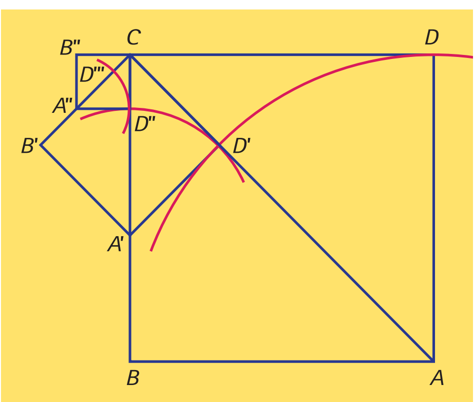
   d) On peut aussi raisonner en s'appuyant sur le fait que le chiffre des unités d'un carré, écrit en base trois, est 0 ou 1.

   e) Procéder par descente infinie, en supposant que a est le plus petit entier tel que $a^2 = 2b^2$.

   (*Tuyau* : On a alors $a > b$, et donc $a = b + c$ avec $a > c > 0$. En tirer l'existence d'une fraction égale à $\sqrt{2}$ et de numérateur inférieur à a.)

   f) Revenant à l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est rationnel, soit k, le plus petit entier naturel tel que $k\sqrt{2}$ est lui-même un entier naturel ; considérer $k\sqrt{2} - k$.

2. Montrer que l'irrationalité de $\sqrt{2}$ découle d'un théorème de base sur les polynômes : soit le polynôme $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ dont les coefficients a_i sont des entiers ; si p/q est une racine rationnelle, la fraction étant irréductible, alors p est un diviseur de a_0 et q, un diviseur de a_n.



3. Une autre preuve repose sur la figure en bas à gauche. Étant donné un carré $ABCD$, à l'aide du compas, déterminons sur la diagonale AC un point D' tel que $AD' \cong AB$ et traçons $A'D'$ perpendiculaire à AC, avec A' sur le côté BC.

   a) Montrer que le triangle rectangle $A'CD'$ est isocèle.

   b) En conclure l'existence d'un carré $A'B'CD'$ sur lequel la même construction peut être effectuée. Et ainsi de suite...

   c) Montrer que les segments $A'B$ et $A'D'$ sont congruents.

   d) Pour fins de contradiction, on suppose que le côté AB et la diagonale AC du carré initial sont *commensurables* – c'est-à-dire qu'ils ont une « commune mesure ». Il existe donc, par hypothèse, un segment déterminé qui entre un nombre entier de fois dans chacun de ces deux segments. Montrer que le segment en cause « mesure » aussi $A'B'$ et $A'C$.

   e) En tirer une contradiction et faire le lien avec l'irrationalité de $\sqrt{2}$.