Un calcul révolutionnaire

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences et Technologies de Lille

- Calculer la racine carrée d'un nombre de 80 chiffres n'est pas très simple, même si on sait que l'entier n est un carré parfait ($n = m^2$).
- Calculer la racine treizième d'un nombre n de 100 chiffres est encore plus compliqué, même si on sait que n est une puissance treizième exacte d'entier ($n = m^{13}$). C'est même certainement impossible de tête.
- Que penser alors du calcul de la racine 1 789-ème d'un nombre n de 7 000 chiffres, même en sachant que n est une puissance 1 789-ème exacte ($n = m^{1789}$). Réussir un tel calcul de tête constituerait une révolution !

Cela semble paradoxal, mais le troisième exercice est le plus simple : vous pouvez d'ailleurs le faire vous-même.

Le second calcul est difficile sans papier, mais quelques amateurs de calcul mental en sont capables. Le premier exercice, lui, n'est, semble-t-il, pas humainement possible de tête : même les plus grands calculateurs prodiges de l'histoire n'ont jamais réussi l'extraction de la racine carrée de nombres de 80 chiffres.

Ce qui semble le plus difficile à première vue est en réalité le plus facile : c'est le paradoxe de la fausse difficulté.

Vous devez expliquer pourquoi il en est ainsi, et découvrir la méthode permettant de calculer la racine 1 789-ème d'un nombre de 7 000 chiffres.

Si vous trouvez cela trop compliqué, attaquez-vous d'abord au paradoxe lexical suivant. Pourquoi est-il faux que la racine treizième du nombre a est le nombre b qui, multiplié treize fois par lui-même, donne a ?

$$\sqrt[2]{27400700996311537987122450870665496114612846822128023776863256774881877789971041}$$

$$\sqrt[13]{\begin{matrix}39872750069313955718\\02898112469783866425\\96503455538354309343\\74758862501664581768\\82936747456340493961\end{matrix}}$$

Solution du paradoxe précédent

Les vendredis 13

Rappel de l'énoncé

Contrairement au bon sens, il y a plus de vendredis 13 que de lundis 13, de mardis 13, de mercredis 13, de jeudis 13, de samedis 13 et de dimanches 13. L'explication de ce paradoxe du calendrier demande un retour en arrière dans le temps. Le calendrier Julien (du nom de Jules César), qu'on utilisait en Europe jusqu'en 1592, avait le défaut de proposer trop d'années bissextiles. Dans ce calendrier, les années bissextiles sont toutes les années multiples de 4. Ce trop grand nombre d'années bissextiles avait créé un décalage entre l'année officielle et l'année véritable (et donc les saisons), ce qui finissait par être gênant. Le pape Grégoire XIII, conseillé par le savant Aloysius Lilus, imagina donc de modifier la règle des années bissextiles. Dans le nouveau calendrier Grégorien qu'il promulgua, la règle est :

une année est bissextile si c'est un multiple de 4 qui n'est pas un multiple de 100, à l'exception des années multiples de 400 qui restent bissextiles.

Il en résulte par exemple que 1900 et 2100 ne sont pas bissextiles, mais que 2000 l'est. Pour le démarrage du nouveau calendrier, on remit l'année officielle en phase avec les saisons et il fut donc décrété que l'on passerait directement du 4 octobre 1582 au 15 octobre 1582. En Espagne, au Portugal et en Italie, qui suivirent la réforme de Grégoire XIII, il n'y eu donc aucune naissance le 5 octobre 1582, et il n'y en eu pas plus d'ailleurs durant toute la période du 6 au 14 octobre de la même année qui, en quelque sorte, n'existe pas.

Suppression de jours

Concernant les jours supprimés, l'histoire est un peu compliquée car l'adoption du calendrier Grégorien ne fut pas simultanée, même en Europe. En France, par exemple, les jours supprimés furent ceux situés entre le dimanche 9 décembre 1582 et le lundi 20 décembre 1582. Dans le Royaume Britannique, le calendrier Grégorien ne fut adopté qu'en 1752. Ce retard obligea à supprimer non plus 10 jours, mais 11, qui furent ceux placés entre le mercredi 2 septembre 1752 et le jeudi 14 septembre 1752.

Le calendrier Grégorien possède une caractéristique remarquable : il est périodique. Précisément tous les 400 ans, il recommence exactement selon la même séquence, de jours, de semaines et de mois. La raison en est simple : le nombre de jours dans une période de 400 ans est un multiple de 7.

En effet, le nombre d'années bissextiles en 400 ans est 100 – 3 = 97. En 400 ans, le nombre de jours est donc :

$$\begin{aligned} &97 \times 366 + 303 \times 365 \\ &\quad = 35502 + 110595 \\ &\quad = 146097 = 20871 \times 7. \end{aligned}$$

Il y a donc exactement 20 871 semaines dans une période de 400 ans du calendrier Grégorien.

Pour savoir si le vendredi 13 est plus fréquent que le lundi 13 ou un autre jour, il faut donc parcourir les 400 années d'un cycle du calendrier Grégorien et faire le compte. On s'aidera d'un programme d'ordinateur de quelques lignes ou en réalisant un patient calcul à la main. On obtient le résultat donné dans l'encadré ci-contre. L'information que le 1er janvier 2000 est un samedi est utile.

Résultat du calcul

Fréquence des jours de la semaine en 400 ans

Lundis 13	685
Mardis 13	685
Mercredis 13	687
Jeudis 13	684
Vendredis 13	688
Samedis 13	684
Dimanches 13	687
Total	4 800

Le total, 4 800, est le nombre de mois en 400 ans. Les vendredis 13 sont donc bien les plus fréquents !