

# Accromoth

Volume 12 • été-automne 2017

Excursion typographique :

## La matrice des fontes

### Autres articles

- Mouvements de la Terre
- Partage équitable?
- Existe-t-il une stratégie gagnante?
- L'équilibre des unités en modélisation mathématique

Rubrique des  
**Paradoxes**

Les vendredis

13

# Éditorial $\alpha$

## Dans cet ouvrage, nous présentons quatre articles du dossier *Applications des mathématiques*.

Un de vos amis arrive à l'improviste alors que vous alliez déguster un pain tressé garni de jambon et de fromage. Vous décidez de partager avec lui. Comment s'assurer que chacun a une part égale du pain, du jambon et du fromage? C'est le problème présenté par Christiane Rousseau dans *Partage équitable?*

Que ce soit dans les jeux ou en économie, le choix de la meilleure stratégie n'est pas toujours simple. Marlène Frigon aborde ce problème dans l'article *Existe-t-il une stratégie gagnante?*. Le problème de déterminer la meilleure stratégie peut se poser dans un jeu à somme nulle entre deux joueurs, mais aussi dans un jeu fini à  $N$  joueurs. Les travaux du mathématicien et économiste américain John Forbes Nash sur ce problème à  $N$  joueurs lui ont valu le prix Nobel d'économie de 1994.

L'analyse dimensionnelle du lien entre plusieurs variables d'un phénomène permet parfois de modéliser ce phénomène sans avoir recours à des outils mathématiques très sophistiqués. Dans l'article *L'équilibre des unités en modélisation mathématique*, Pietro-Luciano Buono nous présente quelques exemples de l'utilisation de l'analyse dimensionnelle.

Les caractères typographiques se sont considérablement diversifiés avec l'avènement des ordinateurs. Cependant, pour que ces caractères conservent leurs caractéristiques si on agrandit ou que l'on rapetisse l'image, il faut que ces caractères soient correctement définis. Dans l'article *Excursion typographique : La matrice des fontes*, Véronique Boutet, Jonathan Godin et Alexis Langlois-Rémillard, nous présentent une démarche inspirée de celle du mathématicien, informaticien et typographe amateur Donald E. Knuth, professeur émérite en informatique à l'université Stanford au cœur de la Silicon valley.

L'année 2016 a marqué le quatre-centième anniversaire de la mise à l'Index de l'ouvrage de Nicolas Copernic, *De revolutionibus orbium coelestium* (*Des révolutions des orbés célestes*). L'ouvrage fut publié en 1543, mais c'est lorsque Galilée a pris ouvertement position en faveur de cette théorie et qu'il a présenté ses observations que la tempête s'est déclenchée. Dans les *Mouvements de la Terre*, on présente des expériences et des observations, développées depuis l'époque de Galilée, qui entérinent les conclusions que celui-ci a tiré de ses observations.

Dans la rubrique des paradoxes, Jean-Paul Delahaye nous présente *Les vendredis 13*. Pour certains, les vendredis 13 sont synonymes de malheur et pour d'autres, ils portent bonheur. Il importe alors de savoir si le nombre annuel de vendredi 13 est inférieur ou supérieur au nombre de lundis 13 ou de mardi 13, par exemple.

Bonne lecture !

André Ross

ISSN 1911-0189

### Rédacteur en chef

**André Ross**

*Professeur de mathématiques*

### Comité éditorial

**Pietro-Luciano Buono**

*Professeur de mathématiques  
University of Ontario Institute  
of Technology*

**France Caron**

*Professeure de didactique  
des mathématiques  
Université de Montréal*

**Christian Genest**

*Professeur de statistique  
Université McGill*

**Frédéric Gourdeau**

*Professeur de mathématiques  
Université Laval*

**Bernard R. Hodgson**

*Professeur de mathématiques  
Université Laval*

**Stéphane Laplante**

*Enseignant de mathématiques  
Collège de Montréal*

**Christiane Rousseau**

*Professeure de mathématiques  
Université de Montréal*

**Robert Wilson**

*Professeur de mathématiques  
Cégep de Lévis-Lauzon*

### Production et Iconographie

**Alexandra Haedrich**

*Institut des sciences mathématiques*

### Conception graphique

**Pierre Lavallée**

*Néograf Design inc.*

### Illustrations de scientifiques et caricatures

**Noémie Ross**

### Illustrations mathématiques

**André Ross**

### Révision linguistique

**Robert Wilson**

*Professeur de mathématiques  
Cégep de Lévis-Lauzon*

## Accromath

*Institut des sciences mathématiques  
Université du Québec à Montréal  
Case postale 8888, succ. Centre-ville  
Montréal (Québec)  
H3C 3P8 Canada*

[redaction@accromath.ca](mailto:redaction@accromath.ca)  
[www.accromath.ca](http://www.accromath.ca)

# Accromath

Volume 12 • Été-Automne 2017

## Sommaire

### Dossier *Histoire des mathématiques*

#### Mouvements de la Terre

André Ross

2

### Dossier *Applications des mathématiques*

#### Partage équitable?

Christiane Rousseau

8

#### Existe-t-il une stratégie gagnante?

Marlène Frigon

14

#### L'équilibre des unités en modélisation mathématique

Pietro-Luciano Buono

20

#### Excursion typographique : la matrice des fontes

Véronique Boutet

Jonathan Godin

Alexis Langlois-Rémillard

26

### Rubrique des **Paradoxes**

#### Les vendredis 13

Jean-Paul Delahaye

30

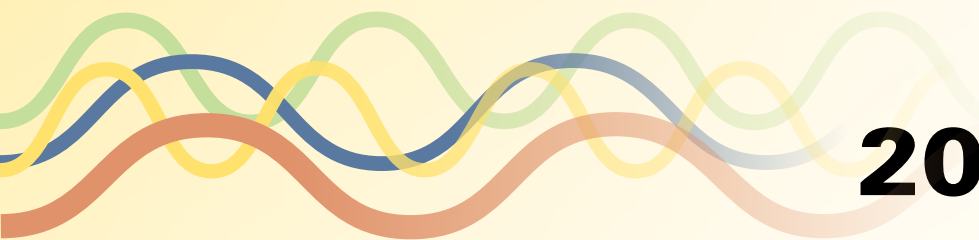
#### Solution du paradoxe précédent

Jean-Paul Delahaye

31

### Section problèmes

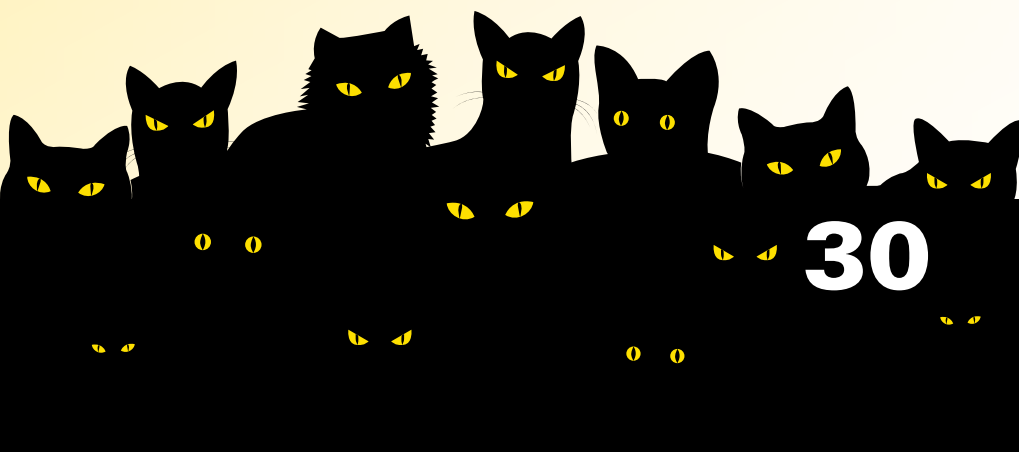
32



20



14



30



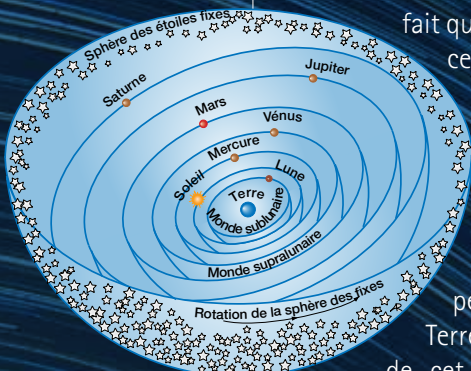
En 1616, l'ouvrage de Nicolas Copernic a été mis à l'Index<sup>1</sup> par l'Église catholique, les mouvements de la Terre étant incompatibles avec les Saintes Écritures. En 1728, James Bradley a fait une découverte qui confirme le mouvement de la Terre autour du Soleil et, en 1851, Léon Foucault a mis au point une expérience qui montre la rotation de la Terre sur elle-même.

**André Ross**  
Professeur retraité

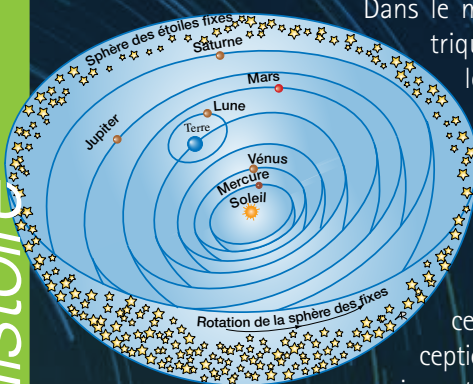
### Le modèle copernicien

En 1543, après de longues années d'hésitations de son auteur, fut publié à Nuremberg le *De Revolutionibus orbium caelestium* de Nicolas Copernic (1473-1543). On raconte que celui-ci aurait reçu une copie de l'ouvrage sur son lit de mort.

Les hésitations de l'auteur viennent du fait qu'à l'époque, la théorie géocentrique héritée d'Aristote et Ptolémée avait été intégrée aux enseignements catholiques par Thomas d'Aquin (1224-1274). Dans le système géocentrique, l'univers est comparé aux pelures d'un oignon, la Terre est immobile au centre de cet univers, les planètes se déplacent dans des orbites qui sont des sphères creuses ayant une certaine épaisseur. Ces orbites sont emboîtées et entraînées par la rotation de la sphère la plus extérieure, celle des étoiles appelée *sphère des fixes*. La rotation de cette sphère est causée par un moteur externe, Dieu en l'occurrence.



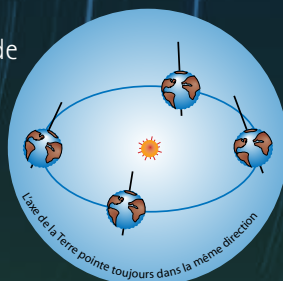
Modèle géocentrique



Modèle héliocentrique

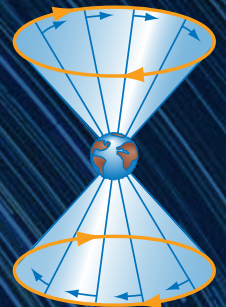
Dans le modèle héliocentrique de Copernic, le Soleil occupe le centre de l'univers et tous les autres corps célestes sont en rotation autour de ce centre, à l'exception de la Lune qui est en rotation autour de la Terre. Copernic dotait la Terre de trois mouvements :

- le mouvement diurne de la rotation de la Terre sur elle-même qui cause l'alternance du jour et de la nuit,



- le mouvement annuel de la Terre autour du Soleil qui cause l'alternance des saisons.
- le mouvement conique qui explique le fait que l'axe de la Terre pointe toujours dans la même direction sur la sphère des étoiles.

Lorsqu'on observe les étoiles durant la nuit, on constate qu'elles sont animées de mouvements circulaires. L'axe de la Terre est toujours dirigé vers le centre de ces mouvements circulaires, cet axe doit donc être animé d'un mouvement conique puisque la Terre se déplace dans un mouvement annuel autour du Soleil.



En mars 1610, Galilée (1564-1642) publie l'ouvrage *Siderius Nuncius* (Messager des étoiles). Dans cet ouvrage, il présente plusieurs de ses observations à la lunette et prend position en faveur du système de Copernic. Il est dénoncé à l'Inquisition qui, en 1616, condamne comme hérétique l'ouvrage de Copernic.

Lorsque son ami Maffeo Barberini (1568-1644) devient pape sous le nom d'Urbain VIII, en 1623, Galilée entreprend la rédaction de son *Dialogue sur les deux systèmes du Monde*. Il cherche à convaincre ses lecteurs de la validité du système copernicien, mais il lui manque la preuve que la Terre est bien animée des mouvements du système de Copernic et son ouvrage est inscrit à l'Index.

1. Index librorum prohibitorum (*Index des livres prohibés*), instauré à l'issue du Concile de Trente (1545-1563).

## La parallaxe annuelle

Fermez l'œil gauche, tendez le bras, pouce relevé, et visez un objet dans la pièce où vous êtes. Ouvrez l'œil gauche et fermez le droit. L'objet que vous visiez semble s'être déplacé. Cette illusion vient du fait que le pouce est observé selon deux angles différents par chacun des yeux. Ce phénomène est appelé *parallaxe*.

La parallaxe est un déplacement apparent de la position relative d'un objet dû au mouvement de l'observateur.

### Parallaxe annuelle

En astronomie, la parallaxe annuelle ou stellaire est l'angle sous lequel on pourrait voir le demi-grand axe de l'orbite terrestre depuis une étoile. On procède comme suit.

Dans la figure à droite, le triangle STE, formé par le Soleil, la Terre et l'étoile, est rectangle en S. Dans ce triangle, on a :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{ST}}{\overline{SE}},$$

où ST est le demi-grand axe de l'orbite terrestre et SE la distance du Soleil à l'étoile. Pour une étoile proche, l'angle  $\alpha$  est plus petit qu'une seconde d'arc (1"). Étant donné que cet angle est très petit, on considère que :

$$\overline{SE} = \overline{TE}.$$

En exprimant la mesure de  $\alpha$  en radians, on a  $\tan \alpha = \alpha$ , puisque l'angle est très petit, d'où :

$$\alpha = \frac{\overline{ST}}{\overline{SE}}, \text{ d'où } \overline{SE} = \frac{\overline{ST}}{\alpha},$$

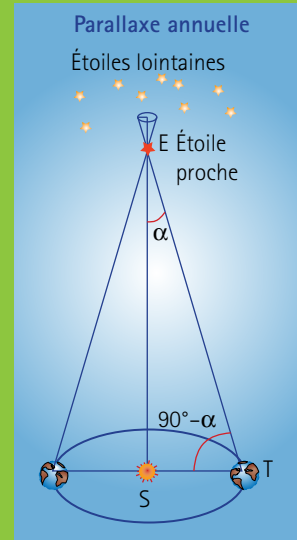
où les distances  $\overline{SE}$  et  $\overline{ST}$  sont exprimées en unités astronomiques. L'unité astronomique<sup>2</sup> correspond approximativement à la distance entre la Terre et le Soleil soit environ 150 millions de kilomètres.

Pour simplifier les calculs, on définit une nouvelle unité astronomique, le *parsec* (pc).

*On dit qu'une étoile est située à une distance de 1 pc si sa parallaxe est égale à 1 seconde d'arc.*

Ainsi, à partir d'une étoile située à 1 pc, on verrait le demi-grand axe de l'orbite terrestre sous un angle de 1 seconde d'arc.

2. Elle est couramment notée UA, mais la notation recommandée par l'Union astronomique internationale depuis 2012 est « au ». Une année-lumière (al) vaut approximativement 63 241 unités astronomiques.



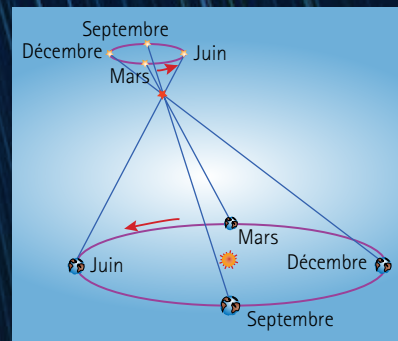
### L'aberration de la lumière

Au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, la plupart des scientifiques sont convaincus de la validité du système héliocentrique, mais il reste à en déterminer une preuve irréfutable et les astronomes sont convaincus que cette preuve sera donnée en mesurant la parallaxe des étoiles (Voir l'encadré *La parallaxe annuelle*).

La première figure à droite illustre ce à quoi on s'attendait en tentant de déterminer la parallaxe d'une étoile.

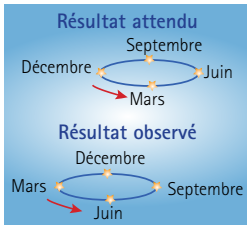
Lorsqu'on se déplace vers la droite, les objets qui nous sont proches semblent se déplacer vers la gauche. Par conséquent, le déplacement de la Terre sur son orbite devrait

donner l'impression que les étoiles se déplacent, elles devraient nous sembler se décaler vers la direction opposée au déplacement de la Terre.



## MOUVEMENTS DE LA

# TERRE



En 1725, l'astronome James Bradley (1693-1762) commence ses travaux pour mesurer la parallaxe d'étoiles. Lors de deux observations successives de la position de  $\gamma$  Draconis (l'étoile Gamma du Dragon) faites avec Samuel Molyneux (1689-1728), il découvre que la position apparente de l'étoile ne s'est pas déplacée dans le sens attendu. Il poursuit ses observations de cette étoile et au bout d'une année, les positions successives forment une petite ellipse, mais avec trois mois de décalage entre le résultat attendu et le résultat observé (figure de gauche). Cette observation laisse Bradley perplexe, il ne sait pas comment expliquer ce phénomène.

Il lui fallut deux ans pour comprendre que ce phénomène fournissait la première observation confirmant scientifiquement la rotation de la Terre autour du Soleil.

Il aurait trouvé l'explication lors d'une excursion en bateau en remarquant qu'un drapeau flottant au vent au mât du bateau ne se dirigeait ni vers l'arrière du bateau ni dans le même sens qu'un drapeau sur la rive.

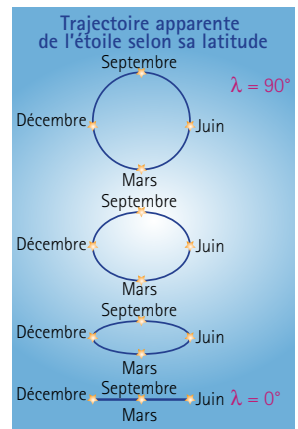
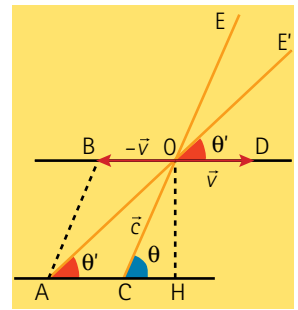
Une autre façon de « voir » ce phénomène est illustrée dans les trois cases à gauche. Un photographe sur le bord de l'autoroute prend trois clichés à intervalles réguliers, montrant un véhicule qui se déplace sur l'autoroute à une vitesse constante alors qu'une mongolfière, forcée de se poser sur l'autoroute, descend à la verticale à une vitesse constante.

En superposant les images des trois cases et en les alignant sur le véhicule de celui-ci, la mongolfière semble selon une ligne oblique pour venir frapper le véhicule.

On expérimente la même chose les jours de pluie. Pour un piéton arrêté, la pluie tombe à la verticale mais, pour le passager d'une automobile en marche, elle tombe suivant une ligne oblique à partir de l'avant du véhicule.

Il en est de même pour la lumière dont la vitesse est finie, la direction apparente de la source lumineuse dépend de la vitesse de celui qui l'observe. C'est le phénomène observé par Bradley et appelé *aberration de la lumière*.

Le graphique ci-contre illustre, sans être à l'échelle, le phénomène de composition des vitesses utilisé par Bradley. Notons  $\vec{c}$  la vitesse des photons de lumière et  $\vec{v}$  la vitesse de l'observateur. Pour l'observateur, tout se passe comme s'il était immobile. La lumière suit la direction EO faisant un angle  $\theta$  avec la direction de son déplacement OD, mais il la voit dans la direction E'O qui fait un angle  $\theta'$  avec son déplacement.



L'excentricité de l'ellipse produite par l'aberration de la lumière dépend de la latitude de l'étoile par rapport à l'écliptique. Celle de l'étoile polaire ( $\lambda = 90^\circ$ ) est un cercle et celle d'une étoile sur l'écliptique ( $\lambda = 0^\circ$ ) est un segment de droite.

C'est comme si les photons de lumière étaient, par rapport à lui, animés de la vitesse représentée par la diagonale du parallélogramme ABOC.

Dans le triangle OAC, la mesure de l'angle en O est  $\theta - \theta'$ , le côté AC est proportionnel à la vitesse  $\vec{v}$  et le côté AO à la vitesse  $\vec{c}$ . En appliquant la loi des sinus, on a alors :

$$\frac{\sin(\theta - \theta')}{v} = \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{c} = \frac{\sin \theta}{c},$$

puisque  $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ . On en tire :

$$\sin(\theta - \theta') = \frac{v}{c} \sin \theta.$$

Dans le triangle COH, on a :

$$\overline{CH} = \overline{c} \cos \theta.$$

De plus, dans le triangle AOH, on a :

$$\begin{aligned} \tan \theta' &= \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AC} + \overline{CH}} = \frac{\overline{c} \sin \theta}{v + \overline{c} \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\frac{v}{c} + \cos \theta}. \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, on représente le rapport des vitesses par  $\beta$  de sorte que :

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\beta + \cos\theta}.$$

Bradley obtient la première confirmation expérimentale de la révolution de la Terre autour du Soleil, tout en confirmant que la vitesse de la lumière est finie, comme l'avait conclu l'astronome danois Christensen Rømer, à partir d'observations de Io, le plus grand satellite de Jupiter (**Lumière-Rømer** et **Rømer**).

Ses mesures lui permettent d'évaluer le rapport entre la vitesse de la lumière et celle du déplacement de la Terre, et l'évalue à 10 000. La vitesse de déplacement de la Terre n'est pas connue à cette époque, mais Bradley en déduit le temps que la lumière met à parvenir du Soleil à la Terre et l'évalue à 8 minutes et 12 secondes, valeur correcte à 10 secondes près<sup>4</sup>.

### L'expérience du pendule

Le 3 février 1851, Léon Foucault (1819-1868) présente à la communauté scientifique l'expérience appelée *expérience du pendule de Foucault*, qui démontre la rotation de la Terre.

L'idée de l'expérience commence à germer dans son esprit alors qu'il travaille à façonner une petite tige d'acier fixée à un tour. Constatant que la tige vibre, il observe que le plan dans lequel la vibration a lieu ne tourne pas avec la tige. Cela s'explique par le fait que la tige conserve son mouvement inertiel puisqu'aucune force n'agit pour modifier cette vibration.

Foucault comprend alors qu'un pendule devrait avoir le même comportement. Même si le point de suspension du pendule est entraîné par la rotation de la Terre, le plan d'oscillation du pendule devrait demeurer le même puisqu'aucune force n'agit sur le pendule.

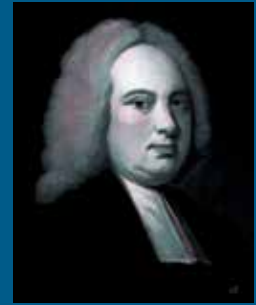
3. Cette application classique de la composition des vitesses est insatisfaisante lorsque l'une des vitesses est celle de la lumière. Le segment OA ne peut être parcouru dans le même temps que le segment OC, la vitesse de la lumière ne pouvant être dépassée. Pour être conforme à la théorie de la relativité restreinte, il faut ajouter un facteur correctif :

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{\beta + \cos\theta}.$$

4. Ces résultats sont publiés en 1727 dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society*.

## James Bradley (1693–1762)

L'astronome britannique James Bradley est le premier à démontrer expérimentalement, par l'explication qu'il donne de l'aberration de la lumière, la révolution de la Terre autour du Soleil, et il donne une mesure de la vitesse de la lumière. À la même période, il découvre aussi une oscillation de l'axe de rotation de la Terre, qu'il appelle *nutation*. Cette oscillation est due à l'attraction conjuguée du Soleil et de la Lune. Il observe toutefois le phénomène durant un cycle complet (18,6 années) avant d'annoncer sa découverte en 1748.



Foucault met au point son expérience au sous-sol de sa maison en utilisant un fil de fer de 2 m et une masse en bronze de 5 kg. Il s'assure qu'aucun courant d'air ni aucune source d'interférence ne perturbe l'oscillation de son pendule. Sa tentative est un succès. Il reste à communiquer le résultat de cette expérience à la communauté scientifique.

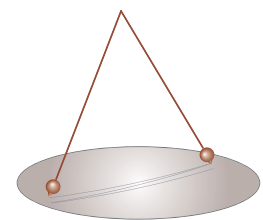
### Présentation à la communauté

C'est dans la Salle du méridien de l'Observatoire de Paris qu'il invite la communauté scientifique en ces termes :

*Vous êtes invité à venir voir la Terre tourner à la Salle du méridien de l'Observatoire de Paris.*

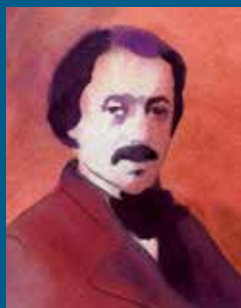
Le 2 février 1851, il envoie les invitations et l'expérience est tenue le 3 février 1851 pour la communauté scientifique et, à la demande de Napoléon III, elle est reprise en mars au Panthéon de Paris pour le grand public. À cette deuxième occasion, Foucault utilise un poids de 28 kg ayant un diamètre de 38 cm. Pour soutenir ce poids, un fil de 67 m de long. Le poids est fini en pointe et celle-ci laisse une trace dans une couronne de sable sur le plancher du panthéon permettant ainsi au public de constater qu'à chaque oscillation d'une durée de 16 secondes, le plan d'oscillation s'est déplacé par rapport au sol.

Le plan d'oscillation du pendule étant indépendant de la rotation de la Terre, cela signifie que pour un pendule au pôle Nord, le plan d'oscillation doit avoir un cycle de 24 heures par rapport à la Terre. À l'équateur, le plan d'oscillation est immobile par rapport à la rotation de la Terre.



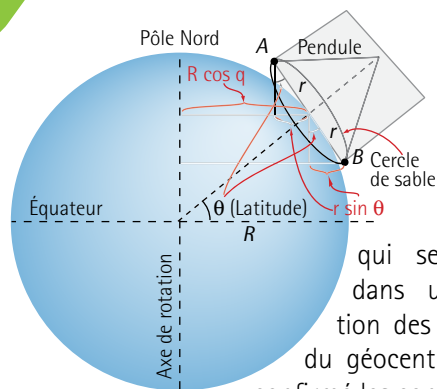
## Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868)

Physicien et astronome, Léon Foucault est né à Paris le 18 septembre 1819. Orphelin de père à neuf ans, il reçoit sa formation élémentaire à la maison pour s'inscrire ensuite au collège Stanislas de Paris. Vers l'âge de 13 ans, il commence à développer de grandes habiletés manuelles dans la construction d'outils et de machines dont certaines sont très sophistiquées, comme un engin à vapeur et un télégraphe.



Dans le but de démontrer la rotation de la Terre sans avoir à utiliser un appareillage de grande dimension, Foucault a développé un instrument qui est encore très utilisé de nos jours, le *gyroscope*.

L'astronome François Arago a proposé à Louis-Hyppolite Fizeau (1819-1896) et à Foucault de tenter de mesurer la vitesse de la lumière par une expérience qui pourrait être réalisée sur Terre. Ils ont tous deux relevé le défi en développant des expériences différentes.



qui se tenait dans un bastion des tenants du géocentrisme, a confirmé les conclusions

de Foucault et marqué le début du changement d'attitude de l'Église par rapport à la théorie copernicienne. Il faudra cependant attendre environ 150 ans avant que Jean-Paul II admette que l'Église avait eu tort dans le dossier Galilée.

### Démonstration de la loi

Considérons la figure en haut de la page qui illustre, à une latitude  $\theta$ , le pendule et le cercle de sable de rayon  $r$ . Lorsque le pendule est en position A, la plus proche du pôle Nord, il est plus proche de l'axe de rotation de la Terre que lorsqu'il est en position B. Par conséquent, au point A, il se déplace moins rapidement qu'au point B.<sup>5</sup> Par la trigonométrie, on obtient facilement que le centre du cercle de sable se déplace à une vitesse :

$$\omega R \cos \theta.$$

Le point le plus au nord de l'oscillation du pendule se déplace quant à lui à une vitesse :

$$\omega R \cos \theta - \omega r \sin \theta.$$

Alors que le point le plus au sud se déplace à la vitesse :

$$\omega R \cos \theta + \omega r \sin \theta.$$

La différence de vitesse entre chacun de ces points et le centre de cercle de sable est :

$$\omega r \sin \theta.$$

Si le pendule débute son oscillation dans le plan Nord-Sud, la composante Est-Ouest de la vitesse sera la même que celle du centre du cercle de sable. Puisque la circonférence du cercle de sable est  $C = 2\pi r$ , le temps nécessaire pour une révolution complète est :

$$T = \frac{2\pi r}{\omega r \sin \theta} = \frac{2\pi}{\omega \sin \theta}.$$

La Terre fait une rotation complète en 24 h, d'où  $\omega = 2\pi/24$ , et :

$$T = \frac{24}{\sin \theta}.$$

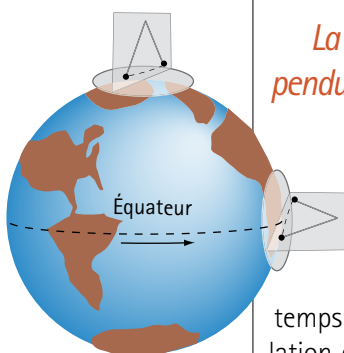
### Loi du sinus de Foucault

Dans un lieu sis entre le pôle Nord et l'équateur, quelle devrait être la période du plan d'oscillation ?

Le jour où s'est tenue l'expérience, l'astronome François Arago (1786-1853) a fait lecture à l'Académie des sciences d'un article rédigé par Foucault dans lequel il relate sa première expérience et explique pourquoi cette expérience prouve la rotation de la Terre. Dans cet article, il indique également comment déterminer, en une location donnée, le temps nécessaire pour que le plan d'oscillation du pendule décrive un tour complet. Appelée *loi du sinus de Foucault*, elle s'énonce comme suit :

*La période du plan d'oscillation du pendule à une latitude  $\theta$  est donnée par :*

$$T = \frac{24}{\sin \theta}.$$



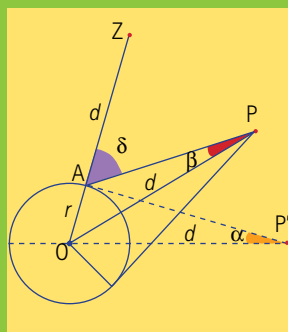
Cela signifie qu'en n'importe quel endroit sur Terre, on peut, connaissant la latitude, calculer la période de temps nécessaire pour que le plan d'oscillation du pendule effectue un tour complet. On peut donc, n'importe où sur Terre, réaliser une expérience vérifiant les conclusions de Foucault.

L'expérience fut rapidement reprise en différents lieux. Dans la cathédrale de Reims en mai 1851, puis en Angleterre, à Genève, à Rio de Janeiro, et à Rome dans l'Église de Saint-Ignace au Vatican. Cette expérience,

5. On explique le phénomène par la force de Coriolis. Foucault ne connaissait probablement pas les travaux de Coriolis portant sur les lois de la dynamique dans un référentiel non inertiel et datant de 1832.



## La parallaxe diurne<sup>6</sup>



Considérons la figure ci-contre, où  $r$  est le rayon terrestre et  $d$  est la distance du centre  $O$  de la Terre au centre de la planète  $P$ . Soit de plus un point  $A$  à la surface de la Terre. La *parallaxe diurne* d'une planète par rapport au point  $A$  est l'angle sous lequel le rayon de la Terre aboutissant en ce point serait vu à partir du centre de la planète. La parallaxe est dite *horizontale* si la planète est dans le plan tangent à la Terre au point  $A$  (position  $P'$ , lever ou coucher de la planète). Elle est alors maximale. La parallaxe est dite de *hauteur* quand la planète est au-dessus de l'horizon (position  $P$ ). La parallaxe est nulle lorsque la planète est au zénith (position  $Z$ ).

Dans cette figure, et par rapport au point  $A$ , l'angle  $\beta$  est la *parallaxe de hauteur* de la planète  $P$ , l'angle  $\alpha$  est sa parallaxe horizontale et  $\delta$  est la distance zénithale observée. Exprimons la relation entre l'angle  $\alpha$  et les angles  $\beta$  et  $\delta$ .

Dans le triangle  $APO$ , la loi des sinus donne :

$$\frac{\sin \beta}{r} = \frac{\sin(180^\circ - \delta)}{d}$$

Puisque  $\sin(180^\circ - \delta) = \sin \delta$ , on a :

$$\frac{\sin \beta}{r} = \frac{\sin \delta}{d}, \text{ d'où } \frac{\sin \beta}{\sin \delta} = \frac{r}{d}$$

Par ailleurs, dans le triangle rectangle  $AP'O$ , on a :

$$\sin \alpha = \frac{r}{d}$$

On obtient donc :

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{\sin \delta}, \text{ d'où } \sin \beta = \sin \alpha \cdot \sin \delta$$

Puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont des angles très petits, on a  $\sin \alpha = \alpha$  et  $\sin \beta = \beta$ , d'où :

$$\beta = \alpha \cdot \sin \delta$$

La parallaxe de hauteur est donc égale à la parallaxe horizontale multipliée par le sinus de la distance zénithale.

De plus, comme

$$\frac{\sin \beta}{\sin \delta} = \frac{r}{d}, \text{ on tire } \sin \beta = \frac{r}{d} \sin \delta$$

Puisque  $\beta$  est très petit, on a  $\sin \beta = \beta$ , et

$$\beta = \frac{r}{d} \sin \delta$$

Supposons maintenant deux observateurs en deux stations éloignées,  $A$  et  $B$ , choisies sur un même méridien et de latitudes  $\lambda$  et  $\lambda'$ , par rapport à l'équateur  $EE'$ . À l'instant du passage de l'astre au méridien, en  $P$ , ils prennent les distances zénithales  $\delta$  et  $\delta'$ , supposées corrigées de la réfraction astronomique. Soient  $\beta$  et  $\beta'$  les parallaxes de hauteur  $APO$  et  $BPO$ . On a alors :

$$\beta = \frac{r}{d} \sin \delta \text{ et } \beta' = \frac{r}{d} \sin \delta'$$

d'où :  $\beta + \beta' = \frac{r}{d} (\sin \delta + \sin \delta')$

La somme des angles du quadrilatère  $OAPB$  est égale à  $360^\circ$  ( $2\pi$  radians), soit :

$$\beta + \beta' + \lambda + \lambda' + (\pi - \delta) + (\pi - \delta') = 2\pi$$

On en tire :

$$\beta + \beta' = (\delta + \delta') - (\lambda + \lambda')$$

et :  $\frac{r}{d} (\sin \delta + \sin \delta') = (\delta + \delta') - (\lambda + \lambda')$ ,

d'où :  $\frac{r}{d} = \frac{(\delta + \delta') - (\lambda + \lambda')}{\sin \delta + \sin \delta'}$

Par conséquent :

$$\alpha = \sin \alpha = \frac{r}{d} = \frac{(\delta + \delta') - (\lambda + \lambda')}{\sin \delta + \sin \delta'}$$

On peut donc calculer la latitude horizontale de la planète en connaissant seulement la distance zénithale et la latitude des deux points d'observation sur le même méridien<sup>7</sup>. On peut ensuite calculer la parallaxe de hauteur de la planète en utilisant :

$$\beta = \alpha \cdot \sin \delta$$

6. La parallaxe diurne est utilisée pour les planètes du système solaire.

7. Par cette méthode, dans les années 1750, les astronomes Nicolas Louis de Lacaille (1713-1762) et Joseph Jérôme de Lalande (1732-1807) ont déterminé la parallaxe de la Lune, celle de Vénus et celle de Mars. Lacaille fit ses observations au cap de Bonne-Espérance et Lalande à Berlin.

*Vous avez acheté un pain tressé de fantaisie, du jambon et du fromage, et dans la confection de votre sandwich, vous vous êtes amusé à faire une section avec plus de jambon et une autre avec plus de fromage. Votre ami arrive au moment du repas, et il vous faut partager le sandwich... Dans le passé, vous avez vaguement entendu parler du théorème du sandwich au jambon de Stone-Tukey: celui-ci affirme qu'en un seul coup de couteau vous pouvez partager en parts égales le pain, le jambon et le fromage. Mais comment donner ce coup de couteau ?*

**Christiane Rousseau**  
Université de Montréal

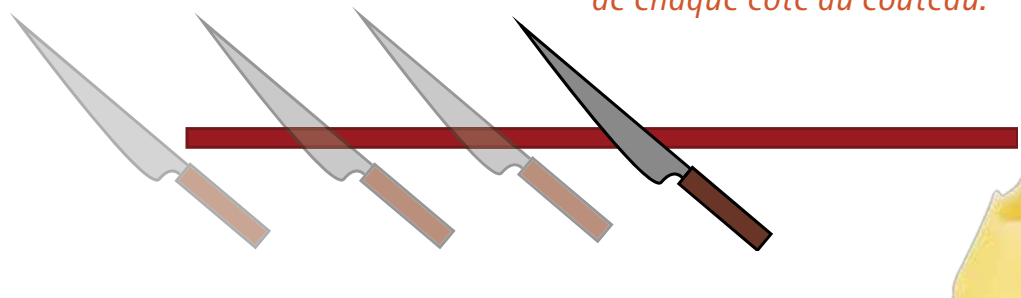
**C**omment partager en un seul coup de couteau un sandwich jambon-fromage de telle sorte que chaque moitié contienne des volumes égaux de pain, de jambon et de fromage? Et pourrait-on faire la même chose si le sandwich contenait également de la moutarde? Pour y répondre, on va commencer par un problème plus facile.

### **Partager un bâton de réglisse**

Vous avez un bâton de réglisse que vous voulez couper en deux. Si vous placez le couteau du côté gauche, alors tout le bâton est à droite. Vous déplacez alors le couteau vers la droite jusqu'à ce que vous ayez la même quantité de réglisse à gauche et à droite.

Remarquez que si vous aviez initialement placé le couteau du côté droit, alors tout le bâton aurait été à gauche et vous auriez alors déplacé le couteau vers la gauche. Aussi, lorsque vous déplacez lentement le couteau parallèlement à lui-même, la quantité de réglisse de chaque côté du couteau varie continûment.

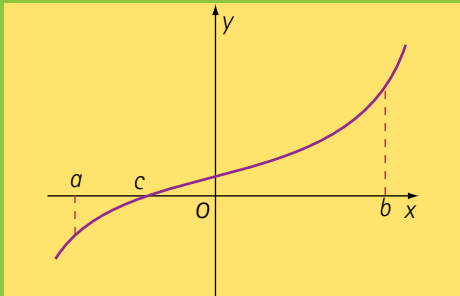
*Puisque aux deux positions extrêmes on a plus de réglisse à gauche ou plus de réglisse à droite, on doit avoir une position entre les deux pour laquelle on a des quantités égales de réglisse de chaque côté du couteau.*



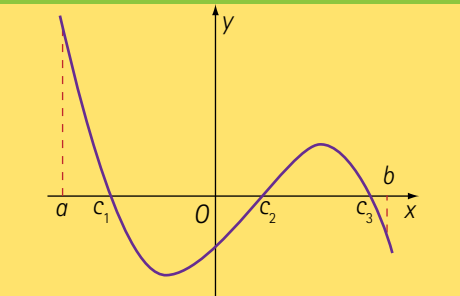
Cette idée est plus profonde qu'il n'y paraît et nous allons l'utiliser à répétition. Remarquons que c'est une application du *théorème de la valeur intermédiaire* (voir encadré ci-dessous). Essayons de l'exploiter. Si au lieu d'un bâton de réglisse, vous aviez eu un bonhomme en pain d'épices, vous auriez pu faire la même chose. Et vous auriez pu le faire quelle que soit la direction du couteau que vous auriez utilisé dans le plan !

### Théorème de la valeur intermédiaire

On considère une fonction continue  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ . Alors, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ .

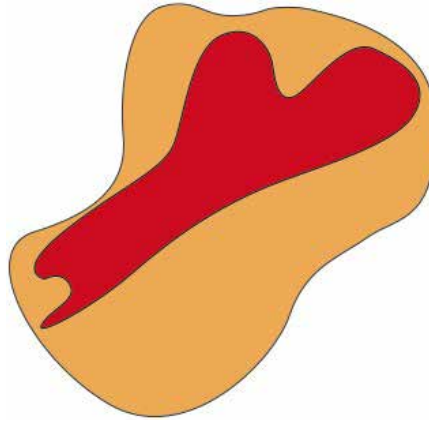


Remarquez que le résultat aurait encore été vrai si  $f(a) > 0$  et  $f(b) < 0$ . De plus, la racine  $c$  pourrait ne pas être unique.

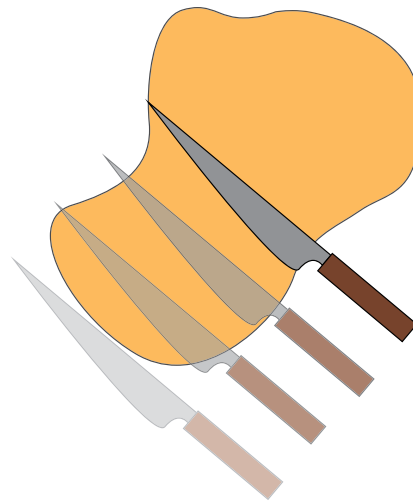


### Partager une danoise aux fruits

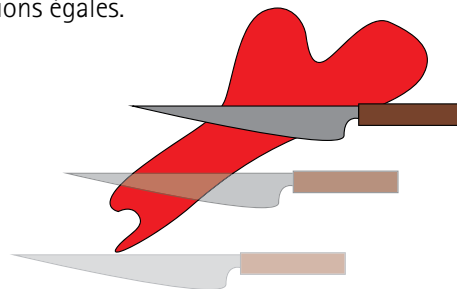
Ici, vous avez deux ingrédients : la brioche et les fruits.



Si vous choisissez une direction de couteau, vous pouvez le déplacer parallèlement à lui-même afin de couper la brioche en deux parties de même volume.



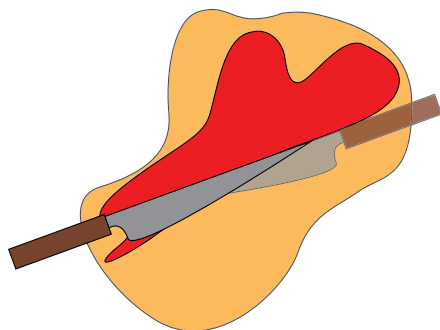
De même, vous pouvez, parallèlement à n'importe quelle direction, trouver une position du couteau qui sépare les fruits en deux portions égales.



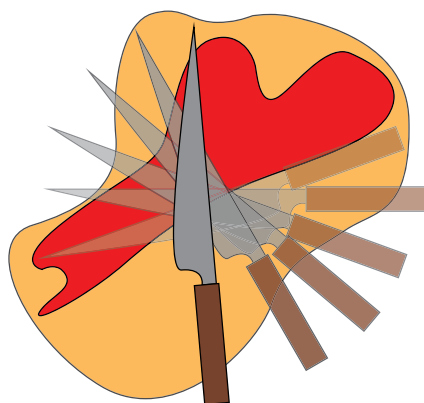
Mais pouvez-vous faire les deux à la fois ?



L'idée va être encore d'utiliser le théorème de la valeur intermédiaire. On va faire tourner notre couteau d'un demi-tour. Pour chaque angle qu'on lui donne, on le place de telle sorte qu'il coupe la brioche en deux. Il faut se convaincre qu'on peut le faire en l'animant d'un mouvement continu. À l'angle de départ, supposons qu'on ait plus de fruits du côté gauche de la lame. Lorsqu'on l'aura tourné de  $180^\circ$ , on aura la même coupe de la brioche, mais on aura maintenant plus de fruits du côté droit.



Et voici notre mouvement continu du couteau.



Si  $\alpha \in [0, 180]$  est l'angle du couteau avec la position initiale, et  $f(\alpha)$  représente la quantité de fruits à gauche moins la quantité de fruits à droite lorsque le couteau a l'angle  $\alpha$ , alors on a  $f(0) > 0$  et  $f(180) < 0$ . Donc, par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe  $\alpha \in [0, 180]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . C'est l'angle cherché pour notre couteau.

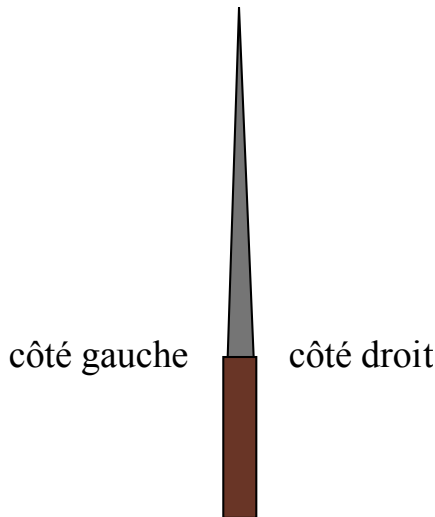
## La deuxième leçon

Lorsque nous avons voulu couper notre réglisse (**un** ingrédient) nous avons utilisé des translations de notre couteau (**un** type de mouvement de notre couteau) et le théorème de la valeur intermédiaire. Lorsque nous avons voulu couper notre danoise (**deux** ingrédients), nous avons utilisé des translations et des rotations de notre couteau (**deux** types de mouvements). C'est maintenant le moment de revenir à notre sandwich au jambon : il a **trois** ingrédients, il nous faudra donc **trois** types de mouvements de notre couteau. Le troisième mouvement est celui de pencher le couteau au lieu de le tenir dans un plan vertical.

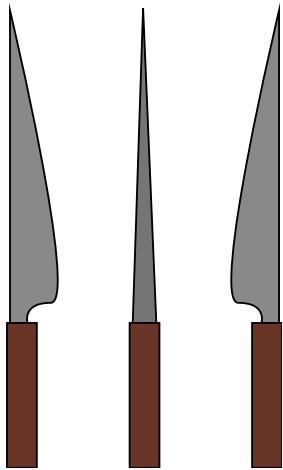
## Revenons au partage de notre sandwich

Notre stratégie est la suivante : nous allons vouloir promener notre couteau de telle sorte qu'en chaque position il coupe en deux volumes égaux le pain et le jambon. Cette promenade de notre couteau correspondra à une « courbe dans l'espace ». Et nous allons utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour la quantité de fromage : à une extrémité de la courbe il y aura plus de fromage du côté gauche du couteau, et à l'autre, plus de fromage du côté droit.

Pour cela, il nous faut définir le *côté gauche du couteau*. Posons le sur une table dans un plan vertical, avec la lame horizontale, le côté tranchant sur la table, et la pointe en avant. Ce que nous voyons à gauche du couteau est appelé son côté gauche, et son côté droit est défini de même.



Maintenant nous allons pencher le couteau dans l'espace, mais ses côtés gauche et droit resteront les mêmes au cours du mouvement.



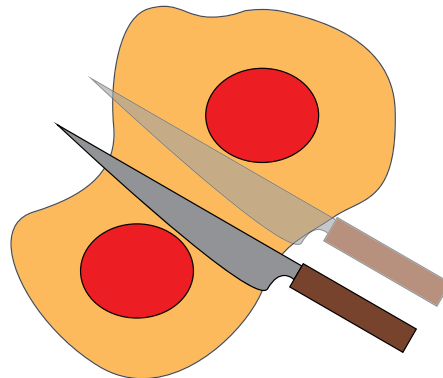
Nous avons vu que quand le couteau est dans un plan vertical, il existe une direction  $\alpha$  du plan et un coup de couteau dans cette direction qui sépare le pain et le jambon en deux portions de mêmes volumes. Bien sûr, le fait que le couteau soit dans un plan vertical pour le couteau n'a rien de particulier. On aurait obtenu le même résultat si on avait penché notre couteau d'un angle  $\beta$ .

Penchons le donc lentement. Pour chaque angle  $\beta$ , il existe un coup de couteau avec cet angle séparant le pain et le jambon en volumes égaux. Suivons ces coups de couteau lorsque  $\beta$  augmente.

Supposons qu'au départ on ait plus de fromage à gauche qu'à droite du couteau. Lorsque  $\beta$  aura augmenté de  $180^\circ$ , alors notre couteau aura la même position qu'au départ sauf que son côté tranchant sera en haut. On aura donc le même trait de coupe que quand  $\beta = 0$ , mais on a échangé les côtés gauche et droit du couteau ! On a donc plus de fromage à droite qu'à gauche du couteau. Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un angle  $\beta \in [0, 180]$  pour lequel on a autant de fromage à gauche qu'à droite.

Si vous avez trouvé que ce raisonnement n'est pas très rigoureux, vous n'avez pas tort...

Ainsi, le plan vertical dans la direction  $\alpha$  qui coupe les fruits en deux volumes égaux n'est pas toujours unique : c'est le cas par exemple si les fruits sont en deux paquets disjoints de même volume.

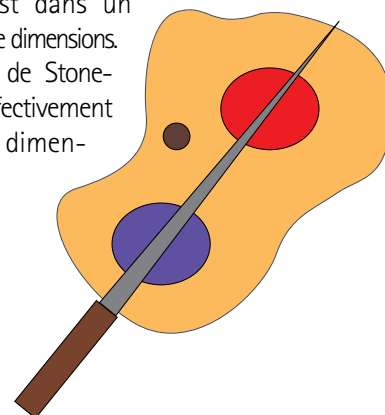


Mais rassurez-vous, il y a quand même moyen de définir des mouvements continus du couteau. Il suffit de prendre comme position du couteau la position milieu de toutes les positions possibles. Pour voir comment on peut rigoureusement écrire ces mouvements du couteau sous forme de fonction, veuillez regarder l'encadré à la page 13.

## Et s'il y avait de la moutarde dans le sandwich ?

Malheureusement on n'a que trois types de mouvements dans l'espace pour notre couteau. En général il n'existe qu'un nombre fini de coups de couteau possibles qui séparent en parts égales le pain, le jambon et le fromage. Donc, on n'a presque aucune chance que ces coups de couteau séparent également la moutarde en deux. Il nous manque un quatrième type de mouvement, indépendant des trois premiers types. Il en est de même avec la danoise à droite : le seul coup de couteau qui coupe en parts égales la brioche, les framboises et les bleuets ne sépare pas en parts égales la noisette.

Mais vous ne serez pas surpris que le partage soit possible si le sandwich avec de la moutarde est dans un espace à quatre dimensions. Le théorème de Stone-Tukey est effectivement vrai en toute dimension  $n \geq 1$ .



## Le théorème du sandwich, une conséquence du théorème de Borsuk-Ulam

La preuve du théorème du sandwich que nous vous avons présentée n'est pas la preuve classique. La preuve classique utilise un des grands théorèmes de la topologie algébrique, soit le *théorème de Borsuk-Ulam*.

Mesurons en chaque point de la surface de la Terre la température et la pression. Le théorème affirme qu'il existe deux points antipodaux qui ont même température et même pression.

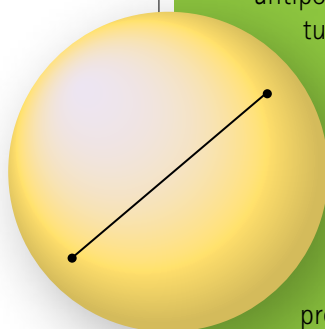
En termes mathématiques, la surface de la terre est une sphère  $S$  et sur cette sphère on définit une fonction  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , qui à un point associe le couple donné par la température et la pression en ce point. Cette fonction  $f: S \rightarrow \mathbb{R}^2$  est continue. Alors il existe  $X \in S$  tel que  $f(X) = f(-X)$ .

Appliquons ce théorème au partage de notre sandwich : un point  $X \in S$  correspond à la direction d'un vecteur  $\overline{OP}$  vers le point podal du couteau (voir encadré page suivante pour la définition de point podal), le vecteur  $\overline{OP}$  pointant du côté gauche du couteau vers le côté droit. On sait qu'il existe une position du couteau parallèle à ce plan coupant le pain en deux parties de même volume. Pour cette position du couteau, la fonction  $f$  associée à  $X$  le couple formé par

- la quantité de jambon du côté gauche
- et la quantité de fromage du côté gauche.

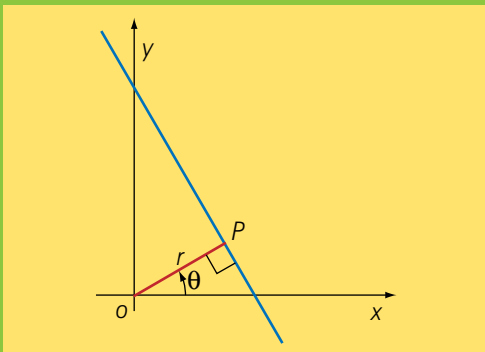
Si maintenant on regarde  $-X$ , ceci signifie qu'on a échangé les côtés gauche et droit du couteau. Ce qui est à gauche du couteau pour la position  $-X$  correspond à ce qui est à droite pour la position  $X$ . Comme  $f(X) = f(-X)$ , ce coup de couteau qui coupait le pain en volumes égaux sépare également le jambon et le fromage en volumes égaux.

Un résultat du même type est le problème du partage discret du collier (voir problèmes).



## Comment écrire sous forme de fonction les mouvements du couteau?

Commençons par formaliser les deux mouvements de notre couteau dans le cas de la danoise. Le couteau est aligné selon une droite dans le plan. Il existe une manière standard de se donner une droite dans le plan ne passant pas par l'origine: il suffit de se donner son *point podal*, c'est-à-dire le point de la droite qui est le plus proche de l'origine<sup>1</sup>.

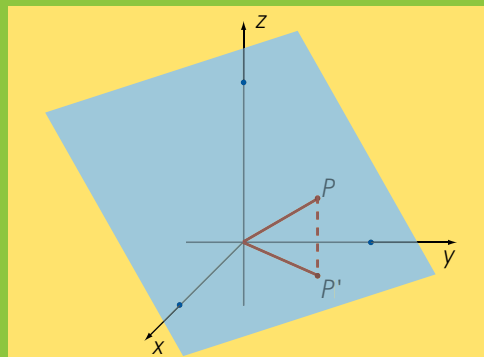


Si  $P$  est ce point, alors la droite est la perpendiculaire passant par  $P$  au vecteur  $v = \overrightarrow{OP}$ .

Se donner le vecteur  $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ , c'est se donner ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , où  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

Si nous revenons à notre danoise, pour chaque angle  $\theta$ , nous avons une position du couteau perpendiculaire à la direction  $\theta$  et coupant la brioche en deux. Cette position du couteau est donnée par le point podal de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ : ceci nous donne donc  $r$  comme une fonction de  $\theta$ :  $r = g(\theta)$  (bien sûr si la droite est unique, mais oublions cette subtilité qui peut être corrigée). Donc, quand nous bougeons notre couteau continûment tout en coupant la brioche en deux, nous nous promenions sur la courbe  $r = g(\theta)$ .

Lorsqu'on passe au partage du sandwich, notre couteau est maintenant un plan dans l'espace. Ici encore, pour se donner un plan dans l'espace, on peut se donner son *point podal*, soit son point le plus proche de l'origine. Soit  $P = (x, y, z)$  ce point.



Il est déterminé par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . Si  $P'$  est la projection de  $P$  dans le plan  $(x, y)$ , alors  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur  $\overrightarrow{OP'}$  avec le demi-axe  $x$  positif. L'angle  $\phi$  est l'angle que fait le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  avec le plan  $(x, y)$ , et  $r = |\overrightarrow{OP}|$  est la distance de  $P$  à l'origine. Vous pouvez vérifier que  $(x, y, z) = (r \cos \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \phi)$ .

Lorsqu'on veut couper notre sandwich, pour chaque angle  $\phi$  que fait la normale au couteau avec le plan horizontal, nous avons une position du couteau avec cet angle, perpendiculaire à la direction d'un vecteur  $(\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi)$ , et coupant le pain et le fromage en deux volumes égaux. Cette position est donnée par la valeur de  $(r, \theta)$  comme fonction de  $\phi$ :  $r = h(\phi)$ ,  $\theta = k(\phi)$ , ce qui décrit une courbe paramétrique dans l'espace. Donc, quand nous bougeons notre couteau continûment tout en coupant à la fois le pain et le fromage en deux volumes égaux, nous nous promenions sur la courbe

$$(x(\phi), y(\phi), z(\phi)) = h(\phi)(\cos k(\phi) \cos \phi, \cos \phi \sin k(\phi), \sin \phi).$$

1. Voir aussi « Géométrie intégrale », Accromath, hiver-printemps, 2015

# Existe-t-il une stratégie gagnante ?

*Vous aimez les jeux de stratégies et vous n'avez pas eu beaucoup de chance au jeu ces derniers temps. Vous vous demandez si les mathématiques pourraient vous aider. Effectivement, il y a une branche des mathématiques appelée la théorie des jeux.*

**Marlène Frigon**  
Université de Montréal

Une figure marquante de ce domaine est John Forbes Nash Jr. Ce nom vous dit peut-être quelque chose. En 2002, l'Oscar du meilleur film a été décerné au film *A Beautiful Mind* (*Un homme d'exception*). Ce film porte sur la vie du brillant mathématicien John Nash qui reçut en 1994 le prix Nobel d'économie pour les travaux de sa thèse sur la théorie des jeux. Cet accomplissement est d'autant plus exceptionnel qu'il n'y a pas de prix Nobel de mathématiques.

Le domaine des mathématiques qu'est la théorie des jeux a d'abord été l'étude des jeux de société. Il a connu un essor important suite à la collaboration fructueuse du mathématicien

John Von Neumann et de l'économiste Oskar Morgenstern. Grâce à eux, on a compris que la théorie des jeux n'est pas seulement amusante, elle est aussi très utile pour résoudre des problèmes en économie.

Regardons d'abord le jeu bien connu, roche, papier, ciseaux.

On note les joueurs par  $J_1$  et  $J_2$ . Les gains du joueur  $J_1$  peuvent être représentés dans un tableau appelé *table des règlements*<sup>1</sup>. Ce tableau représente aussi les pertes

Stratégies		$J_2$		
		R	P	C
$J_1$	R	0	-1	1
	P	1	0	-1
	C	-1	1	0

1. On pourrait aussi représenter les gains de  $J_2$  dans un tableau mais ce n'est pas utile puisque les gains de  $J_2$  sont les pertes de  $J_1$  et que toute l'information est contenue dans un seul tableau.

## Jeu à deux joueurs à somme nulle

Un jeu de stratégies est appelé jeu à somme nulle si le gain d'un joueur est égal à la perte de l'autre joueur. En considérant une perte comme un gain négatif, en additionnant les gains des deux joueurs, on obtient zéro. On suppose que dans ce jeu de stratégies, chaque joueur ne dispose d'aucune information quant au choix de la stratégie de l'autre. Chaque joueur veut choisir la meilleure stratégie.

du joueur  $J_2$ . Voici la table des règlements du joueur  $J_1$ .

Par exemple, si le joueur  $J_1$  choisit roche et que le joueur  $J_2$  choisit papier, le gain du joueur  $J_1$  est indiqué à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne du tableau. Ce gain est de  $-1$ , ce qui signifie que le joueur  $J_1$  donne  $1\$$  au joueur  $J_2$ . Le jeu roche, papier, ciseaux est ce qu'on appelle un *jeu à somme nulle*.

Voyons maintenant un problème de la vie courante qu'on peut écrire sous forme de jeu à deux joueurs à somme nulle.

## Un jeu à deux joueurs à somme nulle en politique

Deux partis politiques s'affrontent dans une élection. Chacun a une base d'électeurs fidèles. Pour l'emporter, ils doivent convaincre des électeurs dont le choix n'est pas arrêté de voter pour eux. L'issue de l'élection dépendra de la position des partis sur une question de



société importante (comme l'exploitation et le transport de pétrole, le réinvestissement en éducation,...).

Chaque parti peut :

- P : se prononcer pour,
- C : se prononcer contre,
- E : éluder la question (parler la langue de bois).

Ils doivent se décider sans savoir ce que fera l'autre parti. Une volte-face ferait mauvais effet. Ils évaluent le pourcentage de votes qu'ils obtiendraient dans chacun des cas. Voici le tableau de ces résultats donné pour le parti  $P_1$ .

Stratégies		$P_2$		
		P	C	E
$P_1$	P	35	60	42
	C	60	55	51
	E	45	52	48

Afin de considérer cette situation comme un jeu à somme nulle, on peut aussi récrire ce tableau en indiquant plutôt quel pourcentage de plus ou de moins de 50% fera le parti  $P_1$ .

Stratégies		$P_2$		
		P	C	E
$P_1$	P	-15	10	-8
	C	10	5	1
	E	-5	2	-2

Essayons maintenant de déterminer quelle serait la meilleure stratégie de chacun des partis.

En regardant le tableau, on constate que :

*$P_1$  n'a pas intérêt à éluder la question.*

Stratégies		$P_2$		
		P	C	E
$P_1$	P	-15	10	-8
	C	10	5	1
	E	-5	2	-2

Quelque soit la stratégie de  $P_2$ ,  $P_1$  obtiendra toujours plus de votes en se prononçant contre.

En regardant le tableau,

$P_2$  a aussi compris que  $P_1$  ne choisira pas la stratégie d'éluder la question. L'examen des options de  $P_2$  permet alors de réaliser que :

*$P_2$  n'a pas intérêt à se prononcer contre.*

Il fera toujours mieux en éludant la question.

$P_1$  sait que  $P_2$  est aussi un fin stratège et qu'il ne choisira pas de se prononcer contre. C'est pourquoi

*$P_1$  n'a pas intérêt à se prononcer pour.*

Stratégies		$P_2$		
		P	C	E
$P_1$	P	-15	10	-8
	C	10	5	1
	E	-5	2	-2

Il obtiendra plus de votes en se prononçant contre. Finalement,

*$P_2$  a intérêt à éluder la question.*

Stratégies		$P_2$		
		P	C	E
$P_1$	P	-15	10	-8
	C	10	5	1
	E	-5	2	-2

En résumé, sous l'hypothèse que chacun des partis sait que l'autre est aussi un fin stratège, chaque parti a analysé sa meilleure stratégie ainsi que celle de l'autre. Ils en sont venus à la conclusion suivante :

- La meilleure stratégie pour  $P_1$  est de se prononcer contre.
- La meilleure stratégie pour  $P_2$  est d'éluder la question.
- Si chaque parti adopte sa stratégie optimale,  $P_1$  s'attend à obtenir 50+1% des votes et  $P_2$  s'attend à obtenir 49% des votes.

Voici maintenant un exemple en économie.

### Jeu à deux joueurs à somme nulle en économie

Deux manufacturiers sont en compétition pour la vente d'un appareil électronique.

La compagnie  $C_1$  peut fabriquer trois modèles : haut, milieu et bas de gamme. Elle peut produire un ou deux de ces produits. Voici ses stratégies possibles :

- H : produire seulement le modèle haut de gamme,
- M : produire seulement le modèle milieu de gamme,
- B : produire seulement le modèle bas de gamme,
- HM : produire les modèles haut et milieu de gamme,
- MB : produire les modèles milieu et bas de gamme.



La compagnie exclut la possibilité de produire les modèles haut et bas de gamme, car cela ne lui permettrait pas de bien définir son image auprès des consommateurs.

La compagnie  $C_2$  ne produit pas de modèle haut de gamme. Voici ses stratégies possibles :

- M : produire seulement le modèle milieu de gamme,
- B : produire seulement le modèle bas de gamme,
- MB : produire les modèles milieu et bas de gamme.

On suppose que ces deux manufacturiers se partagent le marché. Ainsi, les ventes faites par un manufacturier sont des ventes en moins pour l'autre. C'est pourquoi ce problème peut être interprété comme un jeu à deux joueurs à somme nulle. Les compagnies évaluent les gains (ou pertes) supplémentaires en fonction des différentes stratégies. Voici le tableau de ces résultats donnés (en milliers de dollars) pour la compagnie  $C_1$ .

Stratégies		$C_2$		
		M	B	MB
$C_1$	H	-30	40	-50
	M	-10	30	-15
	B	-20	20	-10
	HM	20	15	5
MB		35	-40	-5

Contrairement à l'exemple précédent, il n'y a pas de stratégies qui en domine une autre. Autrement dit, on ne peut pas éliminer des stratégies comme on l'a fait dans l'exemple précédent.

Que faire alors ? Chacune doit examiner les conséquences possibles en fonction de son choix de stratégies.

- Par exemple,  $C_1$  réfléchira avant de choisir la stratégie H, car elle pourrait perdre 30K\$ si  $C_2$  choisissait la stratégie M et elle pourrait perdre 50K\$ si  $C_2$  choisissait la stratégie MB.
- De même,  $C_2$  réfléchira avant de choisir la stratégie M, car elle pourrait perdre 20K\$ si  $C_1$  choisissait la stratégie HM et elle pourrait perdre 35K\$ si  $C_1$  choisissait la stratégie MB.

## Hypothèse de base de la théorie des jeux

Chaque joueur est rationnel et il sait que l'autre l'est tout autant. Il ne choisit pas une stratégie au hasard. Chaque joueur examine pour chacune de ses stratégies ce qu'il peut gagner et surtout ce qu'il peut perdre. En effet, pour chaque stratégie qu'il adopterait, l'autre joueur (qui est intelligent) évitera de le laisser faire de gros gains. Il cherchera plutôt à lui faire faire la plus grosse perte possible.

## Suite du jeu en économie

Chacune des compagnies doit examiner la situation de la façon suivante :

- Pour chaque stratégie,  $C_1$  évalue le gain minimal qu'elle peut faire. (Si ce gain est négatif, c'est une perte).
- Pour chaque stratégie,  $C_2$  évalue la perte maximale qu'elle peut faire. (Si cette perte est un nombre négatif, c'est un gain. En effet, la table des règlements donne les pertes de  $C_2$ , i.e. les gains de  $C_1$ ).

On inclut l'information obtenue dans la table des règlements.

Voyons comment interpréter les nouvelles informations incluses dans ce tableau.

- Par exemple, en choisissant la stratégie H,  $C_1$  pourrait perdre jusqu'à 50K\$. Si  $C_2$  pense que  $C_1$  choisira H dans

Stratégies	$C_2$			Gain minimal
	M	B	MB	
$C_1$	H	-30	40	-50
	M	-10	30	-15
	B	-20	20	-10
	HM	20	15	5
Perte maximale		35	40	5

l'espoir de gagner 40K\$,  $C_2$  évitera de choisir B. Il choisira plutôt la stratégie MB, ce qui fera perdre 50K\$ à  $C_1$ .

- De même, en choisissant la stratégie M,  $C_2$  pourrait perdre jusqu'à 35K\$. Il perdrait moins que cela si  $C_1$  choisissait une autre stratégie que MB.
- Par contre, en choisissant la stratégie HM,  $C_1$  gagnera au moins 5K\$ peu importe la stratégie choisie par  $C_2$ . En fait, il gagnera plus que cela si  $C_2$  choisissait une autre stratégie que MB.

Comme le compétiteur est intelligent, chaque compagnie veut éviter les stratégies risquées qui pourraient lui faire perdre beaucoup d'argent. Elles examinent les stratégies qui sont des valeurs sûres indépendamment du choix fait par l'autre compagnie. Rappelons que chaque compagnie ne connaît pas le choix qui sera fait par l'autre. Elles font donc l'évaluation suivante :

- $C_1$  évalue le *maximum des gains minimaux* qu'elle peut faire.
- $C_2$  évalue le *minimum des pertes maximales* qu'elle peut faire.



Après avoir fait ces évaluations, les compagnies font les constats suivants :

- $C_1$  adoptera la stratégie HM : produire du haut et milieu de gamme.
- $C_2$  adoptera la stratégie MB : produire du milieu et du bas de gamme.
- Avec ces stratégies,  $C_1$  fera un gain supplémentaire de 5 K\$.

Stratégies		$C_2$			Gain minimal	Maximum des minimums
		M	B	MB		
$C_1$	H	-30	40	-50	-50	
	M	-10	30	-15	-15	
	B	-20	20	-10	-20	
	HM	20	15	5	5	5
	MB	35	-40	-5	-40	
Perte maximale		35	40	5		
Minimum des maximums				5		

Font-elles vraiment le meilleur choix? Si une compagnie n'avait pas fait le bon choix, elle voudrait en changer. Imaginons que  $C_2$  n'est pas contente de son choix et que  $C_1$  garde sa stratégie HM. Si  $C_2$  adopte une autre stratégie que MB, elle perdra encore plus d'argent. Sa situation sera pire. De même, imaginons que  $C_1$  regrette son choix qu'elle trouve trop conservateur. Si  $C_1$  change sa stratégie et que  $C_2$  garde sa stratégie MB,  $C_1$  perdra de l'argent plutôt que de faire un gain de 5 K\$. Lorsque les stratégies choisies sont telles que chacun fait pire en changeant seul sa stratégie, on dit que les stratégies sont en équilibre. Dans ce cas, les deux protagonistes ne chercheront pas à déroger de leur stratégie d'équilibre.

### Un jeu qui cause du mécontentement

On considère un jeu à somme nulle et à deux joueurs  $J_1, J_2$  dont la table des règlements est donnée ci-contre.

- $J_1$  a 2 stratégies possibles :  $A_1, A_2$ ;
- $J_2$  a 3 stratégies possibles :  $B_1, B_2, B_3$ .

**Table des règlements** On évalue les gains minimaux de  $J_1$  et les pertes maximales de  $J_2$ , comme dans l'exemple précédent.

Stratégies		$J_2$		
		$B_1$	$B_2$	$B_3$
$J_1$	$A_1$	2	-1	0
	$A_2$	-2	4	3

Ensuite, on évalue le maximum des gains minimaux de  $J_1$  et le minimum des pertes maximales de  $J_2$ .

En faisant ces évaluations, on constate que :

- la stratégie obtenue pour  $J_1$  est  $A_1$ ;
- la stratégie obtenue pour  $J_2$  est  $B_1$ ;
- avec ces choix,  $J_1$  gagne 2\$.

Stratégies		$J_2$			Gain minimal
		$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$J_1$	$A_1$	2	-1	0	-1
	$A_2$	-2	4	3	-2
Perte maximale		2	4	3	

Stratégies		$J_2$			Gain minimal	Maximum des minimums
		$B_1$	$B_2$	$B_3$		
$J_1$	$A_1$	2	-1	0	-1	-1
	$A_2$	-2	4	3	-2	
Perte maximale		2	4	3		
Minimum des maximums		2				

Les joueurs sont rationnels. Si  $J_2$  joue plusieurs fois à ce jeu et comprenant que  $J_1$  choisit chaque fois  $A_1$ , il changera sa stratégie et choisira  $B_2$ . Le joueur  $J_1$  perdra alors 1\$. Si le jeu continue et voyant que  $J_2$  a adopté la stratégie  $B_2$ ,  $J_1$  changera à son tour sa stratégie et choisira  $A_2$ . Le joueur  $J_1$  gagnera alors 4\$. Si le jeu se poursuit, les joueurs changeront de nouveau de stratégies.

On remarque que, dans le tableau précédent, **-1 = maximum des minimums** ≠ **minimum des maximums = 2**.

On dit que les stratégies obtenues  $A_1$  et  $B_1$  ne sont pas en équilibre. Cela explique pourquoi, dans ce jeu-ci, contrairement à l'exemple précédent, les joueurs voudront changer unilatéralement de stratégies. De plus, chaque joueur pourrait avoir avantage à ne pas choisir toujours la même stratégie. Par exemple,  $J_1$  pourrait vouloir choisir  $A_1$ , 4 fois sur 10, et choisir  $A_2$ , 6 fois sur 10. On dirait alors que  $J_1$  choisit  $A_1$  avec probabilité de 0,4 et choisit  $A_2$  avec probabilité de 0,6. Ainsi,  $0,4 + 0,6 = 1$ .

### Stratégie pure et stratégie mixte

Un joueur a un ensemble de  $n$  stratégies possibles :  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Chacune de ces stratégies est appelée une *stratégie pure*. D'autre part, il pourrait choisir chacune de ces stratégies avec une certaine probabilité, c'est-à-dire choisir  $S_i$  avec probabilité  $p_i \in [0, 1]$  de sorte que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

On peut identifier l'ensemble des choix de  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  à l'ensemble des possibilités de choisir différentes stratégies. On appelle  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  une *stratégie mixte*. On remarque que si une coordonnée de  $p$  égale 1, alors toutes les autres sont nulles ; cela correspond à une stratégie pure.



Stratégies et probabilités		J <sub>2</sub>		
		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
J <sub>1</sub>	A <sub>1</sub> x <sub>1</sub>	2	-1	0
	A <sub>2</sub> x <sub>2</sub>	-2	4	3

## Suite du jeu pour lequel on recherche un équilibre

On considère à nouveau le jeu précédent. On voudrait maintenant savoir, pour chacun des joueurs, quels seraient les meilleurs choix de probabilités pour l'adoption de ses stratégies. On suppose que :

- J<sub>1</sub> choisit (A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>) avec une probabilité  $x = (x_1, x_2)$ , où  $x_1 + x_2 = 1$  ;
- J<sub>2</sub> choisit (B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub>) avec une probabilité  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , où  $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ .

Le gain de J<sub>1</sub> avec la stratégie A<sub>1</sub> est :

$$2y_1 + (-1)y_2 + (0)y_3,$$

puisque J<sub>2</sub> choisit B<sub>1</sub> avec une probabilité y<sub>1</sub>, B<sub>2</sub> avec une probabilité y<sub>2</sub> et B<sub>3</sub> avec une probabilité y<sub>3</sub>.

De même, le gain de J<sub>1</sub> avec la stratégie A<sub>2</sub> est :

$$-2y_1 + 4y_2 + 3y_3.$$

Puisque J<sub>1</sub> choisit A<sub>1</sub> avec une probabilité x<sub>1</sub> et A<sub>2</sub> avec une probabilité x<sub>2</sub>, le gain total de J<sub>1</sub> en fonction de x et y est :

$$f(x, y) = x_1(2y_1 + (-1)y_2 + (0)y_3) + x_2(-2y_1 + 4y_2 + 3y_3).$$

Maintenant, chaque joueur examine les conséquences possibles pour chacune de ses stratégies mixtes.

- Pour chaque stratégie x, J<sub>1</sub> évalue son gain minimal parmi toutes les stratégies mixtes possibles de J<sub>2</sub>. On note ce gain minimal par  $\min_y f(x, y)$ .
- Pour chaque stratégie y, J<sub>2</sub> évalue sa perte maximale parmi tous les choix possibles de J<sub>1</sub>. On note cette perte maximale par  $\max_x f(x, y)$ .

Chaque joueur sait que l'autre est rationnel. Il veut faire le meilleur choix sachant que l'autre voudra faire de même. Il voudra éviter les risques pouvant être coûteux.

- J<sub>1</sub> évalue le maximum de ses gains minimaux qu'on note  $\max_x \min_y f(x, y)$ .

Il détermine pour quelle stratégie x\* ce maximum est atteint, c'est-à-dire que  $\min_y f(x^*, y) = \max_x \min_y f(x, y)$ .

- J<sub>2</sub> évalue le minimum de ses pertes maximales noté  $\min_y \max_x f(x, y)$ .

Il détermine pour quelle stratégie y\* ce minimum est atteint, c'est-à-dire que  $\max_x f(x, y^*) = \min_y \max_x f(x, y)$ .

Après ces évaluations, les joueurs trouveront les stratégies suivantes :

$$x^* = (1/2, 1/2) \text{ et } y^* = (5/9, 4/9, 0).$$

Avec ces stratégies, le joueur J<sub>1</sub> prévoit un gain de 2/3\$ car  $f(x^*, y^*) = 2/3$  (voir l'encadré pour le calcul de x\* et y\*).

Les stratégies trouvées par J<sub>1</sub> et J<sub>2</sub>,  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  et  $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$  vérifient :

$$\max_x \min_y f(x, y) = f(x^*, y^*) = \min_y \max_x f(x, y).$$

Chaque joueur n'aura pas intérêt à changer seul de stratégie. De telles stratégies x\* et y\* sont dites en équilibre.

### Couple de stratégies en équilibre

On note par x et y les stratégies mixtes des joueurs J<sub>1</sub> et J<sub>2</sub> dans un jeu à deux joueurs à somme nulle. On note f(x, y) le gain fait par J<sub>1</sub> lorsqu'il adopte la stratégie x et J<sub>2</sub> la stratégie y. Un couple de stratégies (x\*, y\*) est en équilibre si :

$$\max_x \min_y f(x, y) = f(x^*, y^*) = \min_y \max_x f(x, y).$$

Ces stratégies vérifient :

$$f(x^*, y^*) \geq \max_x f(x, y^*)$$

(J<sub>1</sub> ne peut pas gagner plus en changeant seul de stratégie);

$$f(x^*, y^*) \leq \min_y f(x^*, y)$$

(J<sub>2</sub> ne peut pas perdre moins en changeant seul de stratégie).

### Existence d'un couple de stratégies en équilibre

On peut procéder comme on l'a fait dans l'exemple précédent pour tout jeu fini à deux joueurs à somme nulle. On dit qu'un jeu est fini si chaque joueur dispose d'un nombre fini de stratégies pures. Par exemple, le joueur J<sub>1</sub> pourrait avoir les stratégies A<sub>1</sub>, ..., A<sub>m</sub> et J<sub>2</sub> pourrait avoir les stratégies B<sub>1</sub>, ..., B<sub>n</sub>. Il est naturel de se demander si un tel jeu possède toujours un point d'équilibre. La réponse est due à Von Neumann.

### Théorème (Von Neumann).

Tout jeu fini à 2 joueurs à somme nulle admet un couple de stratégies mixtes en équilibre.

### Et John Forbes Nash Jr. dans tout ça?

On peut facilement imaginer des jeux (ou des applications de ceux-ci) qui ne sont pas à somme nulle, c'est-à-dire que ce qu'un joueur perd n'est pas nécessairement donné à l'autre joueur.

Aussi, comme on l'a vu dans les exemples précédents, le fait de considérer seulement des jeux à deux joueurs limite grandement le nombre d'applications possibles.

En effet, il n'est pas rare qu'il y ait plus de deux partis politiques ou plus de deux compagnies luttant pour augmenter leur part de marché.

John Nash a généralisé le théorème de Von Neumann à des jeux pouvant ne pas être à somme nulle et pouvant comporter plus de deux joueurs. Ce faisant, il a considérablement augmenté le nombre d'applications possibles de la théorie des jeux à l'économie et aussi à d'autres disciplines.

### Théorème (Nash).

Tout jeu fini à  $N$  joueurs admet un point d'équilibre.

En termes mathématiques, cela peut être écrit de la façon suivante. On considère un jeu à  $N$  joueurs,  $J_1, J_2, \dots, J_N$ .

- Le joueur  $J_i$  a un ensemble de stratégies  $\{S_{i,1}, \dots, S_{i,n}\}$  qu'il peut jouer avec probabilité  $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$ .
- Si les joueurs  $J_1, J_2, \dots, J_N$  choisissent respectivement les stratégies  $x_1, \dots, x_N$ , le joueur  $J_i$  gagnera  $f_i(x_1, \dots, x_N)$ .
- Le théorème de Nash assure qu'il existe un point d'équilibre  $(x_1^*, \dots, x_N^*)$  tel que :

$$f_1(x_1^*, \dots, x_N^*) \geq \max_{x_1} f_1(x_1, x_2^*, \dots, x_N^*),$$

$$\vdots$$

$$f_N(x_1^*, \dots, x_N^*) \geq \max_{x_N} f_N(x_1^*, \dots, x_{N-1}^*, x_N).$$

Ces inégalités signifient qu'aucun joueur n'a intérêt à être le seul à déroger de sa stratégie d'équilibre. Un tel point d'équilibre s'appelle un *équilibre de Nash*.

### Calcul des stratégies d'équilibre

Dans l'exemple du jeu, avec les stratégies  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2, y_3)$ , le gain de  $J_1$  est :

$$f(x, y) = x_1(2y_1 - y_2) + x_2(-2y_1 + 4y_2 + 3y_3).$$

Puisque  $x_1 + x_2 = 1$  et  $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ , on remplace  $x_1$  par  $(1 - x_2)$  et  $y_3$  par  $(1 - y_1 - y_2)$ . On obtient alors :

$$f(x, y) = 2y_1 - y_2 + x_2(2y_2 - 7y_1 + 3).$$

Puisque  $x_2 \in [0, 1]$ , pour chaque  $y$  fixé,

$$\max_x f(x, y) = \begin{cases} 2y_1 - y_2 & \text{si } 2y_2 - 7y_1 + 3 \leq 0, \\ 2y_1 - y_2 + 2y_2 - 7y_1 + 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

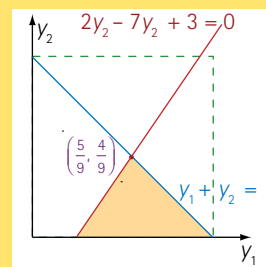
Le  $\min_y \max_x f(x, y)$  sera atteint pour  $y_1^*$  et  $y_2^*$  tels que  $y_2^*$  est le plus grand des  $(y_1, y_2)$  vérifiant  $2y_2 - 7y_1 + 3 \leq 0$  et  $y_1 + y_2 \leq 1$ .

On déduit que  $y^* = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, 0\right)$ .

On remarque que  $f(x, y^*) = 2/3$  pour tout  $x$ . On peut choisir

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

mais n'importe quel  $x$  aurait fait l'affaire. On réalise ainsi que, pour ce jeu, il n'y a pas unicité du couple de stratégies en équilibre.



### John Forbes Nash Jr.

John Nash est né en 1928 à Bluefield en Virginie occidentale. En 1945, il a entrepris un baccalauréat en mathématiques à Carnegie Institute of Technology à Pittsburg.

En 1948, il a été admis à l'université Princeton dans le programme de Ph.D. en mathématiques. R.L. Duffin, professeur à Carnegie, avait envoyé une lettre de recommandation. Celle-ci ne contenait qu'une phrase : « *This man is a genius* ». En 1950, il a soutenu sa thèse : *Non-cooperative games*.

John Nash souffrait de schizophrénie. Cette maladie a grandement entravé ses travaux et sa carrière. Malgré cela, la contribution mathématique de John Nash est exceptionnelle.

En 1994, John Nash a reçu le prix Nobel d'économie pour les travaux de sa thèse.

En 2015, il a reçu le prix Abel (décerné par l'Académie norvégienne des sciences et lettres) (conjointement avec Louis Nirenberg, un mathématicien de renommée internationale, né en Ontario et diplômé de McGill). À leur retour d'Oslo, Nash et sa femme mouraient dans un accident de taxi.



En 1950, le physicien et mathématicien britannique Sir Geoffrey Ingram Taylor (1886–1975) publia un modèle mathématique approximant l'énergie libérée par une explosion effectuée lors d'essais nucléaires secrets américains en 1945. Dans le climat de guerre froide de l'époque, l'armée américaine fut si surprise par la précision de cette approximation, non basée sur leurs données secrètes, qu'elle réprimanda Taylor!

# L'équilibre des unités

## en modélisation mathématique

**Pietro-Luciano Buono**  
University of Ontario  
Institute of Technology

Une partie du modèle mathématique de Taylor repose sur un principe que nous allons explorer dans cet article.

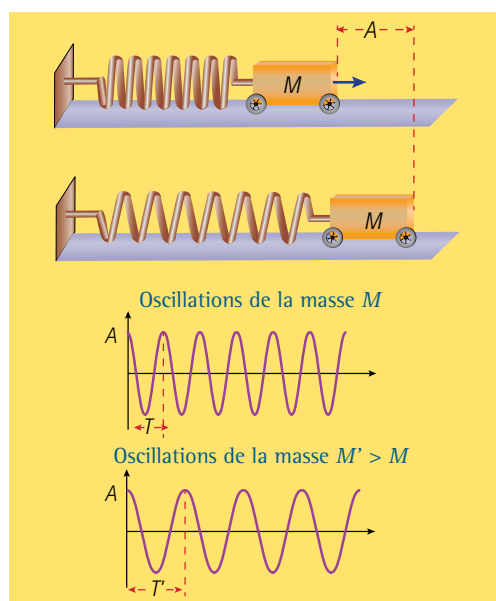
Nous allons voir comment on peut obtenir la structure de base de modèles mathématiques de façon élégante en commençant par l'étude des unités pour les dimensions (distance, temps, masse, etc) qui se retrouvent dans le problème. Vous savez qu'il est pratique de donner des unités pour des grandeurs courantes, par exemple, compter le temps en secondes, la distance en mètres, la vitesse en mètres par seconde, etc. On dit que ces grandeurs sont dimensionnelles. Certaines grandeurs peuvent être moins familières, telle la masse volumique avec unités de kilogrammes par mètre cube ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) ou bien la force qui se mesure en Newtons qui sont des kilogramme-mètres par seconde au carré ( $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ ). Les unités utilisées ici seront toujours du système international (SI), communément appelé système métrique.

Supposons une combinaison (multiplication, division, etc) de grandeurs dimensionnelles se retrouvant des deux côtés d'une équation. Il est alors impératif que les combinaisons d'unités se retrouvant de chaque côté soient exactement les mêmes. C'est-à-dire qu'il faut un équilibre des unités pour que l'équation soit valide! C'est le principe de base de la méthode connue sous le nom « d'analyse dimensionnelle ». Nous allons illustrer la méthode avec deux exemples relativement élémentaires: un de physique et l'autre en écologie. Ensuite, nous allons résumer l'approche de Taylor. Grâce à ces exemples, nous allons pouvoir énoncer un théorème général qui permet de faire des calculs systématiques en analyse dimensionnelle.

### Les oscillations d'un chariot

Commençons par le problème suivant que vous avez sans doute déjà rencontré dans le cadre d'un cours de physique. Considérons un chariot de masse  $M$  (en kg) sur un plan horizontal attaché à un mur par un ressort ayant une constante de rappel  $k$  (ou constante de Hooke), voir figure ci-contre.

Si nous négligeons la friction du ressort et des roues sur le plan, alors en déplaçant le chariot de sa position au repos à  $x = 0$  par une distance  $A > 0$  et en le relâchant avec vitesse initiale 0, il est raisonnable de penser que le chariot va décrire un mouvement oscillatoire de période  $T$  et d'amplitude  $A$ . Nous pouvons obtenir de l'information sur  $T$  de façon heuristique. En effet, pour deux ressorts de raideurs  $k_1 < k_2$ , le chariot relié au ressort plus raide,  $k_2$ , sera ramené vers sa position initiale plus rapidement qu'avec le ressort  $k_1$  et donc sa période d'oscillation



sera plus courte. Supposons que le ressort a une constante de rappel  $k$ . Si nous augmentons la masse de  $M$  à  $M'$ , alors la période d'oscillation sera augmentée puisque la force  $F$  fournie par le ressort doit combattre une inertie plus grande. Par la loi de Newton,  $F = M'a' = Ma$  implique que  $a' < a$ . Donc l'accélération (et la vitesse) sera réduite. Est-ce que ces déductions peuvent être obtenues de manière plus précise? Qu'en est-il de l'influence de  $A$  sur  $T$ ? Dans un cours de physique, ce problème est abordé dans un cadre expérimental ou de façon théorique en résolvant une équation différentielle de deuxième ordre, ce qui est assez complexe! Or, l'analyse dimensionnelle résout ce problème grâce au principe d'équilibre des unités de mesure en un seul calcul bien simple. Voyons les détails.

Le problème possède les grandeurs suivantes pour lesquelles nous identifions les unités: le déplacement initial  $A$  (en mètres, m), la constante de raideur  $k$  (en Newton par mètre,  $\text{Nm}^{-1}$ ), la masse  $M$  (en kg) et la période  $T$  (en secondes, s). Notez que le Newton se décompose en des unités plus élémentaires,  $N = \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ , ce qui implique que les unités de  $k$  sont  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$ . Nous voulons obtenir un estimé de la période  $T$  en fonction de  $A$ ,  $k$  et  $M$ , nous écrivons ceci :

$$T = f(A; k; M), \quad (1)$$

où  $f$  est une fonction inconnue. Puisque  $T$  est en secondes,  $f(A; k; M)$  doit aussi avoir des secondes comme unité. Donc, il nous faut trouver trois constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  telles que :

$$s = (\text{m})^\alpha (\text{kg})^\beta (\text{kg}\cdot\text{s}^{-2})^\gamma.$$

En regroupant les unités, on a alors :

$$s = (\text{m})^\alpha \cdot (\text{kg})^{\beta+\gamma} \cdot (\text{s})^{-2\gamma}.$$

Pour que les unités soient les mêmes dans les deux membres de l'équation, il faut résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases}.$$

La solution s'obtient facilement, on doit avoir  $\alpha = 0$ ,  $\beta + \gamma = 0$  et  $\gamma = -1/2$ , d'où  $\beta = 1/2$ .

Puisque  $\alpha = 0$ , l'unité de distance est absente de la relation. Par conséquent, la fréquence d'oscillation ne dépend pas de la distance de déplacement de la masse par rapport à sa position initiale.

Puisque  $(kM^{-1})^{1/2}$  a des unités de  $\text{s}^{-1}$ , nous pouvons éliminer toutes les unités de l'équation (1) en multipliant l'équation par cette quantité. Puisque  $f$  est inconnue, nous pouvons écrire :

$$f(A; k; M) = (kM^{-1})^{1/2} f(A; k; M)$$

et nous obtenons :

$$\sqrt{\frac{k}{M}} T = f(A; k; M).$$

Nous désignons le terme du côté gauche de l'équation par  $\Pi = (kM^{-1})^{1/2} T$  et ce terme est sans dimension puisque toutes les unités s'annulent.

L'observation cruciale ici est que si on change les unités des grandeurs  $A$ ,  $k$  et  $M$  de la fonction  $f$ , par exemple, les mètres en centimètres ou les kilogrammes en grammes, alors  $f$  doit nécessairement changer de valeur. Mais le côté gauche est invariant puisqu'il est sans dimension. Ceci implique que la fonction  $f$  du membre de droite ne peut dépendre de  $A$ ,  $k$  ou  $M$ . Par conséquent, la fonction  $f(A; k; M)$  est une constante que nous notons  $F_0$ . On a donc :

$$\sqrt{\frac{k}{M}} T = F_0, \text{ d'où } T = F_0 \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

On constate à nouveau que la période ne dépend pas de  $A$ . De plus, nous avons précisé la dépendance obtenue heuristiquement ci-dessus puisque la variation de  $T$  est directement proportionnelle à la racine carrée de  $M$  et inversement proportionnelle à la racine carrée de  $k$ .

### Description de la démarche

Pour généraliser la démarche, il faut d'abord identifier les dimensions de base du problème, c'est-à-dire celles qui ne peuvent être décomposées en fonction d'autres dimensions.

Dans l'exemple du chariot, ce sont la masse en kilogrammes, le temps en secondes et la distance en mètres.

Il y a quatre grandeurs mesurables qui sont :  $u = T$ , du côté gauche de l'équation ainsi que  $W_1 = M$ ,  $W_2 = k$  et  $W_3 = A$  que nous appelons grandeurs primaires. Celles-ci s'écrivent en fonction des dimensions de base.

En adoptant cette notation plus générale, l'équation  $T = f(A; k; M)$  de cet exemple s'écrit  $u = f(W_1; W_2; W_3)$  où  $f$  est une fonction inconnue.

L'analyse dimensionnelle a été développée initialement pour aborder des problèmes de physique. Avec le temps, plusieurs autres disciplines scientifiques ont adopté cette approche comme l'illustre l'exemple en écologie présenté en encadré.

## G.I. Taylor et l'explosion nucléaire

En 1950, le mathématicien et physicien anglais G.I. Taylor publia deux articles sur la modélisation mathématique de la formation d'ondes de chocs lors d'une explosion violente en s'aidant de la méthode d'analyse dimensionnelle présentée dans les deux exemples que nous venons de voir. Dans le deuxième article, Taylor applique sa théorie au cas du premier essai nucléaire effectué au Nouveau-Mexique en 1945 et parvient à estimer l'énergie libérée par l'explosion à près de 17,5 kilo-tonnes (kT) en n'utilisant pour son estimation que des photos

## Exemple en écologie

La compréhension des mécanismes qui régissent l'occupation du territoire par les membres d'une espèce est un problème important en écologie. Entre autres, une des questions est de pouvoir évaluer les bénéfices de contrôler un territoire donné<sup>1</sup>. Les besoins énergétiques de l'animal faisant partie des bénéfices à évaluer, considérons ce cas pour un prédateur. Les besoins énergétiques,  $B$ , sont mesurés en joules par seconde ( $J \cdot s^{-1}$ , énergie par unité de temps). Supposons que  $B$  dépend des grandeurs suivantes: l'aire du territoire  $A$  ( $m^2$ ), la densité  $\rho$ , c'est-à-dire la quantité de proies par unité de superficie ( $q \cdot m^{-2}$ ), la vitesse moyenne de déplacement  $\sigma$  ( $m \cdot s^{-1}$ ), l'énergie  $e$  fournie par proie ( $J \cdot q^{-1}$ ) et finalement le temps de manipulation  $h$  de la proie ( $s \cdot q^{-1}$ ). Rappelons les équivalences suivantes,  $1 J = 1 N \cdot m$  et  $1 N = 1 kg \cdot m \cdot s^{-2}$ .

Il y a donc quatre unités de base: kg, m, s et la quantité de proies  $q$ . Dans la notation générale de la description de la démarche, le problème comporte six variables  $u = B$ ,  $W_1 = A$ ,  $W_2 = \rho$ ,  $W_3 = \sigma$ ,  $W_4 = e$  et  $W_5 = h$ . L'équation de départ est :

$$B = f(A; \rho; \sigma; e; h),$$

1. Voir aussi « Des prédateurs et leurs proies », Accromath. vol. 8.1 hiver-printemps 2013.

où  $f$  est une fonction inconnue. Il faut déterminer une combinaison du produit des variables,  $A; \rho; \sigma; e$  et  $h$ , ayant les mêmes unités que  $B$ . Puisqu'il y a quatre unités de base et cinq variables, une des grandeurs de  $f$  est redondante et on ne conserve que quatre variables, les grandeurs primaires :

$$P_1 = \rho, P_2 = \sigma, P_3 = e \text{ et } P_4 = h.$$

Il faut trouver les exposants  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  tels que :

$$\begin{aligned} kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} &= (q \cdot m^{-2})^\alpha (m \cdot s^{-1})^\beta (kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot q^{-1})^\gamma (s \cdot q^{-1})^\delta \\ &= m^{-2\alpha + \beta + 2\gamma} s^{-\beta - 2\gamma + \delta} q^{\alpha - \gamma - \delta} kg^\gamma. \end{aligned}$$

Pour équilibrer les kilogrammes, il faut que  $\gamma = 1$  et pour déterminer  $\alpha, \beta$  et  $\delta$ , il reste à résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + 2 = 2 \\ -\beta + 2 + \delta = -3 \\ \alpha - 1 - \delta = 0 \end{cases}$$

La solution est  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\delta = -1$  et  $\gamma = 1$ . C'est-à-dire que la quantité  $eh^{-1}$  a les mêmes unités que  $B$  et en divisant l'équation  $B = f(A; \rho; \sigma; e; h)$  par  $eh^{-1}$ , on obtient :

$$\frac{Bh}{e} = \frac{h}{e} f(A; \rho; \sigma; e; h).$$

Le terme  $\Pi := Bh/e$  est sans dimension puisque toutes les unités s'annulent. Comme précédemment, on écrit :

$$G(A; \rho; \sigma; e; h) = \frac{h}{e} f(A; \rho; \sigma; e; h)$$



identifiant temporellement la formation du nuage nucléaire. Or, les responsables américains ont révélé, sans plus de précisions, que cette énergie se situait entre 15 et 20 kT, les données et calculs sur cet essai nucléaire étant secrets d'état. Nous allons voir comment G.I. Taylor s'y est pris pour arriver à son résultat. Lors de recherches précédentes, G.I. Taylor avait amassé un bagage scientifique pour comprendre les différents facteurs intervenant dans une telle explosion. Il prit comme point de départ la relation suivante

$$r = f(t; E; \rho_0; P_0), \quad (4)$$

où  $r$  est le rayon d'expansion de l'onde de choc,  $t$  le temps,  $E$  l'énergie,  $\rho_0$  la densité

de l'air ambiante et  $P_0$  la pression atmosphérique. Encore une fois, la fonction  $f$  est inconnue. Il y a trois unités fondamentales: la masse (en kg), la distance (en mètres) et le temps (en secondes). Les unités des grandeurs de l'équation (4) sont les mètres (m) pour  $r$ , les secondes (s) pour  $t$  et les autres demandent le petit rappel suivant. L'énergie pour une particule de masse  $m$  se déplaçant à une vitesse  $v$  est donnée par l'équation  $E = (mv^2)/2$ , ce qui implique que l'énergie a comme unités  $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ . La pression atmosphérique est définie par une mesure de force (en Newtons, N) par unité de surface ( $\text{m}^2$ ) ce qui se traduit par des unités de  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ . La densité de l'air est une masse volumique avec les unités  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

et donc :

$$\Pi = G(A; \rho; \sigma; e; h). \quad (3)$$

Que faire avec la variable  $A$ ?

Puisqu'elle est redondante, elle est appelée **quantité secondaire** et désignée par  $S_1 = A$ . On utilise les grandeurs primaires pour la réécrire en éliminant les unités. Par une démarche similaire à celle ci-haut, on obtient :

$$m^2 = ((q \cdot m^{-2})(m \cdot s^{-1})(s \cdot q^{-1}))^{-2}$$

ce qui veut dire que la quantité  $\Pi_1 = \rho\sigma h\sqrt{A}$  est sans dimension. En isolant  $A$ , on a  $A = (\rho\sigma h)^{-2} \Pi_1^2$  et :

$$\Pi = G((\rho\sigma h)^{-2} \Pi_1^2; \rho; \sigma; e; h) := F(\Pi_1; \rho; \sigma; e; h),$$

où puisque  $G$  est inconnue, nous pouvons remplacer cette fonction par  $F$ . Puisque  $\Pi$  est sans dimension, le côté droit de l'équation doit aussi être sans dimension. Ce qui veut dire que  $F$  dépend uniquement de  $\Pi_1$  :

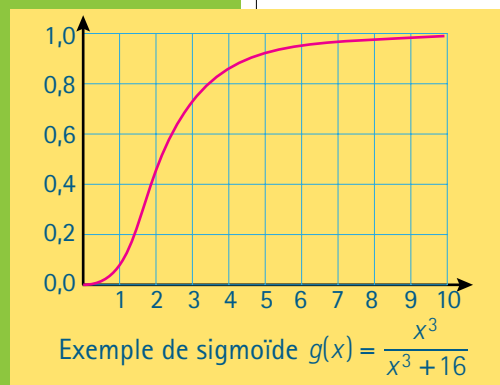
$$\Pi = F(\Pi_1).$$

Ce résultat est remarquable puisqu'il démontre que le problème initial impliquant six variables peut se réduire à une relation entre deux variables uniquement:  $\Pi = Bh/e$  et  $\Pi_1 = \rho\sigma h\sqrt{A}$ . On peut aller plus loin et supposer que  $F(0) = 0$ , c'est-à-dire qu'un territoire d'aire  $A = 0$  n'apporte aucune contribution aux besoins énergétiques. Nous ajoutons l'hypothèse que  $F$  est une fonction croissante. De plus, en écrivant

$$B = \frac{e}{h} F(\Pi_1),$$

on remarque que le ratio  $e/h$  est le taux de consommation maximal puisque cette expression suggère que l'animal passe tout son temps à manger sans faire de déplacements. Nous pouvons donc affirmer que  $B \leq e/h$  et nous supposons que  $F$  a une asymptote horizontale vers 1 lorsque  $\Pi_1$  tend vers l'infini. Il y a plusieurs fonctions satisfaisant ces conditions. Par contre, les écologistes s'entendent (en ajoutant une hypothèse) pour dire que  $F$  doit être une fonction de type « sigmoïde », c'est-à-dire, en forme de S, comme dans la figure ci-contre.

Les grandeurs  $B$ ,  $A$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $e$ , et  $h$  pour une espèce particulière sont mesurables. Évidemment, pour ce faire, les écologistes doivent y mettre beaucoup d'efforts. Lorsque ces valeurs sont obtenues, la relation simple donnée par  $\Pi$ ,  $\Pi_1$  et la sigmoïde permet d'avoir une synthèse efficace d'un problème initialement complexe.



À nos trois unités fondamentales nous associons (comme dans l'exemple en écologie) trois grandeurs primaires: le temps  $P_1 = t$ , l'énergie  $P_2 = E$  et la densité  $P_3 = \rho_0$ . D'autres choix peuvent être faits bien entendu et le lecteur peut vérifier l'impact d'un choix différent. Nous avons une quantité secondaire qui est  $S_1 = P_0$ .

L'équation reliant les unités de  $u = r$  avec les unités des grandeurs primaires est :

$$m = s^\alpha (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})^\beta (\text{kg} \cdot \text{s}^{-3})^\gamma,$$

ce qui donne à résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ 2\beta - 3\gamma = 1 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases},$$

dont la solution est  $\alpha = 2/5$ ,  $\beta = 1/5$  et  $\gamma = -1/5$ . Nous pouvons alors construire la quantité, sans dimension, associée au côté gauche de l'équation (4) :

$$\Pi = r \left( \frac{\rho_0}{t^2 E} \right)^{1/5}.$$

Nous allons aussi obtenir une quantité sans dimension pour la quantité secondaire  $S_1 = P_0$ . Puisque  $S_1$  a comme unités  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ 2\beta - 3\gamma = -1 \\ \alpha - 2\beta = -2 \end{cases}$$

Il faut remarquer ici que le côté gauche des équations du système est le même que précédemment, ce qui est normal puisque nous utilisons les trois mêmes unités de base: kg, m et s. Ce système a comme solution  $\alpha = -6/5$ ,  $\beta = 2/5$  et  $\gamma = 3/5$ . Nous avons donc la quantité sans dimension :

$$\Pi_1 = P_0 \left( \frac{t^6}{E^2 \rho_0^3} \right)^{1/5}.$$

Comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, en multipliant l'équation (4) pour que le côté gauche soit sans dimension, on obtient :

$$r \left( \frac{\rho_0}{t^2 E} \right)^{1/5} = \left( \frac{\rho_0}{t^2 E} \right)^{1/5} f(t; E; \rho_0; P_0)$$

et nous écrivons :

$$G(t; E; \rho; P_0) = \left( \frac{\rho_0}{t^2 E} \right)^{1/5} f(t; E; \rho; P_0).$$

Comme précédemment, on peut remplacer la quantité secondaire  $P_0$  par  $\Pi_1$  et changer  $G$  pour  $F$  :

$$r \left( \frac{\rho_0}{t^2 E} \right)^{1/5} = F(t; E; \rho_0; \Pi_1).$$

Or, nous savons que le côté droit ne peut dépendre des variables primaires et donc l'équation devient :

$$r \left( \frac{\rho_0}{t^2 E} \right)^{1/5} = F(\Pi_1)$$

ou similairement :

$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho_0} \right)^{1/5} F \left( P_0 \left( \frac{t^6}{E^2 \rho_0^3} \right)^{1/5} \right).$$

Ici, Taylor supposa en première approximation que  $F$  est une fonction constante  $F \approx F_0$ , puis pour un temps court comme celui de l'explosion, le terme  $t^6$  est très petit par rapport au terme d'énergie  $E^2$ . Des connaissances empiriques sur les explosions lui font choisir  $F_0 = 1$ . Nous avons alors,

$$r = \left( \frac{t^2 E}{\rho_0} \right)^{1/5},$$

où la densité de l'air  $\rho_0 = 1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Grâce aux images à l'échelle et chronométrées qui furent diffusées par le gouvernement américain, Taylor a eu accès à une série de valeurs de  $r$  et  $t$  correspondant à l'évolution de l'explosion. Il ne reste plus qu'une seule variable,  $E$ , dans l'équation et ainsi Taylor a pu estimer l'énergie.

Comme les exemples présentés le démontrent, la méthode d'analyse dimensionnelle est un outil très utile pour simplifier l'étude de phénomènes dans une variété de domaines scientifiques. L'exemple de l'explosion atomique tel qu'analysé par G.I. Taylor montre la puissance de cette approche et les résultats surprenants qui en découlent.

## Théorème de l'analyse dimensionnelle

La méthode d'analyse dimensionnelle remonte aux travaux du physicien anglais John William Strutt (1842-1919), lauréat du prix Nobel de physique de 1904. Strutt est plus connu sous le titre de Lord Rayleigh. Une première formulation systématique de l'analyse dimensionnelle fut proposée en 1878 par Joseph Louis François Bertrand (1822-1900). Les calculs des exemples de cet article sont valides pour un nombre arbitraire de variables et le théorème général en ce sens fut prouvé en 1892 par l'ingénieur des télégraphes et mathématicien français Aimé Vaschy (1857-1899). La formulation présentée ici remonte à 1914 et est due au physicien américain Edgar Buckingham (1867-1940). Comme nous avons fait dans les exemples, les grandeurs mesurables sont notées par les variables  $u, W_1, \dots, W_n$  et nous supposons que celles-ci satisfont :

$$u = f(W_1; \dots; W_n),$$

où  $f$  est une fonction inconnue. Nous allons supposer que notre problème a  $m \leq n$  unités de base toutes provenant du système international. Ceci nous permet de séparer les grandeurs  $W_1, \dots, W_n$  en  $m$  grandeurs primaires  $P_1, \dots, P_m$  et  $n - m$  grandeurs secondaires  $S_1, \dots, S_{n-m}$ . Puisque l'on a autant de grandeurs primaires que d'unités, nous construisons une quantité  $D$  avec les mêmes unités que la quantité  $u$  en écrivant :

$$D = P_1^{\alpha_1} \dots P_m^{\alpha_m}$$

où les exposants  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sont les inconnues. La clé ici est qu'avec des méthodes d'algèbre linéaire, il est possible de démontrer

qu'il existe une seule solution  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  du système d'équations. On définit la quantité sans dimension  $\Pi := u/D$  et alors notre équation originale se transforme en :

$$\Pi = \frac{u}{D} = \frac{1}{D} f(P_1; \dots; P_m; S_1; \dots; S_{n-m}).$$

Pour chaque quantité secondaire, on définit  $D_j = P_1^{\alpha_{1,j}} \dots P_m^{\alpha_{m,j}}$  et ici aussi les exposants sont uniques. Ceci nous donne les grandeurs sans dimension  $\Pi_j := S_j/D_j$  pour  $j = 1, \dots, n-m$  et alors :

$$\Pi = \frac{1}{D} f(P_1; \dots; P_m; D_1 \Pi_1; \dots; D_{n-m} \Pi_{n-m}).$$

Puisque la fonction  $f$  est inconnue, nous pouvons renommer le côté droit de l'équation :

$$\Pi = F(P_1; \dots; P_m; \Pi_1; \dots; \Pi_{n-m}).$$

Comme nous l'avons vu dans les exemples, le côté droit ne peut dépendre des grandeurs avec dimensions  $P_1, \dots, P_m$ . Ceci implique que l'équation de départ de  $u$  en fonction de  $W_1, \dots, W_n$  est transformée en :

$$u = DF(\Pi_1; \dots; \Pi_m).$$

Nous pouvons donc résumer cette dérivation générale.

### Théorème

Un modèle mathématique donné par une relation  $u = f(W_1; \dots; W_n)$ , inchangée pour tout système d'unités de mesure, peut se réécrire comme une relation sans dimension des grandeurs originales,

$$u = DF(\Pi_1; \dots; \Pi_m).$$

Excursion typographique :

# La matrice des fontes

*La technologie disponible est le plus grand frein à l'innovation. Les premières polices de caractères étaient limitées par l'obligation de mouler en plomb le caractère voulu. La venue des ordinateurs a changé la donne. Une multitude de fontes existent de nos jours, mais comment les définir correctement?*

**Véronique Boutet**  
**Jonathan Godin**  
**Alexis Langlois-Rémillard**  
Université de Montréal

Une fonte bien définie devrait être reproductible parfaitement et conserver son intégrité lors d'agrandissement ou de rapetissement de l'affichage. Il y a maintenant quelques décennies que des fontes sont générées par des logiciels et une bonne théorie existe sur le sujet. Le principe consiste à décrire une lettre en ne gardant que l'essentiel fixé pour permettre un maximum de flexibilité sur les autres aspects. La démarche que nous suivons est librement inspirée de celle du mathématicien et typographe amateur Donald E. Knuth.

## Passer la lettre sous rayons X

Lors de l'élaboration du glyphe d'une lettre, c'est-à-dire sa réalisation visuelle dans une fonte donnée, le typographe accorde son attention à une multitude de détails insoupçonnés: la graisse d'un trait, sa longueur, sa

courbure, ses effets calligraphiques ainsi que des décorations comme les ornements, les empattements et les queues pour en nommer quelques-uns. Toutes ces considérations constituent la « chair » du glyphe et complexifient considérablement notre analyse. Nous passerons donc les caractères sous rayons X afin d'oublier pour un moment leurs artifices séducteurs et ainsi dévoiler leur squelette.

Examinons le caractère « c », puisqu'il reste très similaire d'une fonte et d'une casse à l'autre. Le caractère est représenté par un graphe formé de deux sommets reliés par une arête (voir figure ci-contre); nous pouvons l'imaginer comme le squelette du glyphe. Après cette métamorphose, l'épaisseur



Graphique de la lettre C

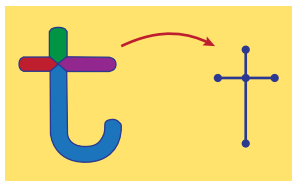
## Une police au secours des lecteurs

La dyslexie-dysorthographe est un trouble de la maîtrise de la lecture et de l'écriture. Il peut se percevoir de plusieurs façons chez un individu. Un signe reconnaissable est, plus particulièrement dans le cas de la dyslexie, une difficulté persistante à différencier les caractères lors de la lecture. Nous sommes parfois amenés à changer la police de caractères afin de faciliter la lecture. Pour aider les personnes atteintes, il faut prioriser les fontes qui possèdent :

- des espaces plus grands entre les différents caractères;
- des caractères uniques pour chaque lettre de l'alphabet.

Les lettres « p », « q », « d » et « b » sont particulièrement semblables, car selon la fonte utilisée, elles peuvent être obtenues l'une de l'autre à la suite d'une isométrie, une composition de translations, de rotations et de réflexions. En 2008, un designer graphique du nom de Christian Boer développa la Dyslexie Font. Il s'est assuré qu'aucun caractère de cette fonte ne soit isométrique à un autre en modifiant au nécessaire la courbure, la graisse et la longueur des différents traits, ainsi que d'autres aspects au besoin. Comme quoi étudier les fontes ne relève pas seulement d'une quête d'esthétisme!

et la forme du segment n'ont plus d'importance; seule la connaissance des sommets formant les extrémités de l'arête importe. Pour trouver le graphe des autres lettres, il faut placer un sommet à chaque extrémité et à chaque croisement et relier deux sommets lorsqu'il y a un segment de lettre qui les rejoint.



Après avoir « engrahé » tous les glyphes, nous voyons que plusieurs lettres ont le même graphe (voir figures à droite); dans ceux-ci réside la fondation des lettres. Par exemple il peut paraître surprenant que le « y » soit dans le même groupe que le « n » et le « u », mais toutes les lettres de ce groupe présentent l'idée d'un trait vertical principal qui supporte la lettre : le fût en typographie. Dans leur graphe, formé de trois arêtes, nous pouvons en choisir un comme étant principal, ce qui formera le fût lors de la confection.

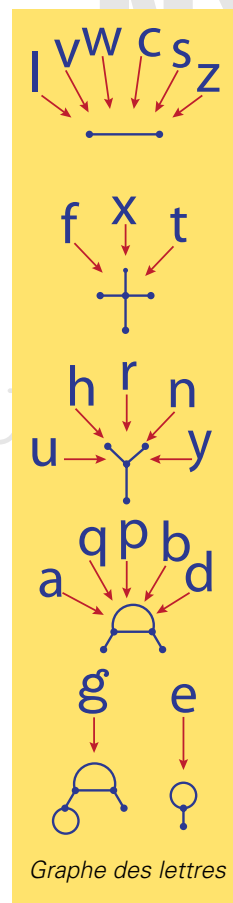
Le graphe du groupe du « b » est quant à lui un cycle avec deux pattes. Ce cycle qui les différencie des autres lettres est une information bien précieuse, appelée la panse en typographie. Il est essentiel de la prendre en compte dans l'élaboration d'un programme. Un tel programme ne pourrait produire, pour l'instant, que des lettres dépouillées, des graphes. Reste à savoir comment il doit relier les points.

## De l'automobile à la calligraphie

Le squelette d'une lettre offre des informations de valeur sur les distinctions principales de celle-ci avec ses congénères alphabétiques. Toutefois, tout comme un squelette n'offre qu'une bien maigre image de la créature qu'il porte, les graphes ne permettent pas de distinguer tous les caractères. La sinuosité du « s » n'a rien en commun avec la droiture du « l » ou la rotondité du « c », et bien peu attentif qui confondrait le « a » et le « b ». Si nous voulons analyser une fonte, il nous faudra un peu plus d'outils.

C'est le monde de l'automobile française qui apporta une solution astucieuse issue des ingénieurs Paul de Casteljaou (1930-) et Pierre Bézier (1910-1999) : les courbes de Bézier. Leur idée fut de créer une procédure pour calculer automatiquement des courbes polynomiales de degré  $n$  pour joindre deux points dès que l'utilisateur définit  $n + 1$  contraintes. Cette idée permet de simplifier grandement le dessin informatique et leurs courbes offrent une très grande précision.

Les courbes de Bézier les plus utilisées dans les logiciels de dessin sont celles de degré trois. Elles ont suffisamment de degrés de liberté pour assurer la continuité de la dérivée lorsque deux courbes sont jointes et leur petit degré assure qu'elles n'oscilleront pas excessivement.



## La typographie en mots

Ajustons les pendules et présentons un peu de lexique typographique.

Le *corps* d'une lettre fait référence à la taille d'un caractère qui est habituellement exprimé en points typographiques. Un *point* (ou une unité) vaut environ 0,188 mm.

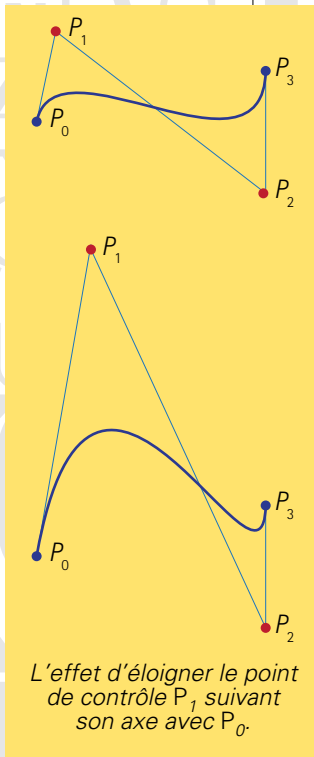
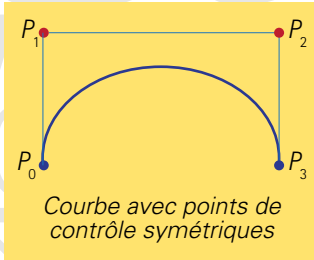
Définissons simultanément le *contrepoinçon* et la *panse* d'une lettre comme leur définition est en quelque sorte interreliée. Le contrepoinçon est l'espace blanc contenu à l'intérieur d'une lettre. Cet espace est inclus dans la panse qui est, quant à elle, la partie arrondie de la lettre. Ces deux mots proviennent du temps où chaque caractère était poinçonné à l'intérieur d'une matrice qui servait ensuite de moule pour créer le caractère mobile en plomb.

L'*empattement* est l'allongement des traits qui terminent une lettre (dessin). Les fontes dites sans empattement sont souvent connu sous le nom « sans serif » de l'anglais.

Le *fût* ou le *montant* d'une lettre est le trait vertical principal d'une lettre. Un même caractère peut posséder plusieurs fûts verticaux et même des fûts diagonaux qui sont à ce moment-là simplement appelés les *diagonales*. La traverse d'une lettre fait référence au trait croisant le fût telle la barre horizontale dans les lettres « t » et « f » par exemple. Nous utilisons le terme *graisse* d'un trait pour parler de son épaisseur.



En rouge, la panse. En noir sur le D, le fût. En noir sur le C, un empattement.



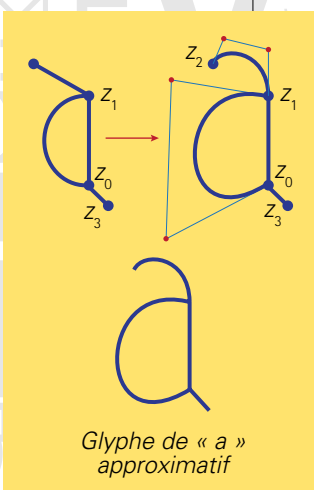
Pour définir une courbe de Bézier de degré trois, il faut quatre points :  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . Le premier point est le point de départ et le quatrième, le point d'arrivée. Les deux autres points offrent un contrôle sur la courbe. La courbe part de  $P_0$  vers  $P_1$  et arrive à  $P_3$  selon la direction définie par  $\overline{P_2P_3}$ . Attention, cela ne veut pas dire que la courbe passe par  $P_1$  et  $P_2$  ! Ces points ne servent qu'à donner la tangente aux points de départ et d'arrivée.

L'avantage principal de ces courbes est que la définition des traits est mathématique. Cela veut dire qu'il est possible de prendre un dessin et de l'agrandir autant qu'on veut sans perdre la qualité de l'image. L'encadré « Mécanique de l'affichage » explore le procédé employé pour ce faire.

## Caractères modernes

Déjà aux 17<sup>e</sup> et 18<sup>e</sup> siècles, les typographes ont cherché à créer des fontes en suivant une approche mathématique. Des barrières calculatoires se sont cependant dressées sur leur chemin et l'idée fut abandonnée. Au vingtième siècle, la commercialisation d'ordinateurs puissants dans les années 70 donna à l'approche mathématique une nouvelle vie. Ne restait plus qu'à fournir aux typographes un logiciel pour donner vie à leurs créations.

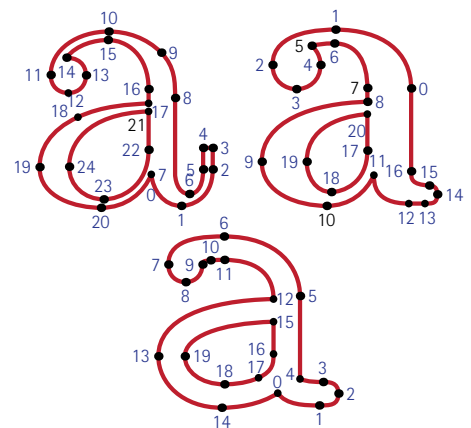
L'idée de Bézier et de de Casteljau permet de tracer des courbes avec clarté, facilité, précision et reproductibilité; des qualités très recherchées en typographie. Par exemple, la figure à gauche montre comment les courbes de Bézier produisent déjà un glyphe reconnaissable avec un minimum d'effort à partir du graphe. Entre chaque couple de points joints par une arête, il faut simplement donner deux points de contrôle pour obtenir un polynôme



cubique calculé automatiquement pour les relier. Il ne reste plus qu'à peaufiner un peu le tout.

Le héros de cette histoire est Donald E. Knuth (1938- ) (prononcé ke-nou-th API/kə'nu:θ). Tandis qu'il écrivait son œuvre maîtresse : *The Art of Computer Programming*, il reçut les épreuves du livre et trouva que la composition laissait grandement à désirer. Le positionnement des différents éléments graphiques ainsi que la police de caractère utilisée n'était pas de son goût. Il décida donc de créer un logiciel de traitement de texte répondant à ses besoins : TeX. Afin de le compléter, il créa METAFONT, un programme permettant de créer des fontes qu'il utilisait pour produire la police de caractères utilisée par TeX : « Computer Modern » (CM).

Le programme METAFONT permet de contrôler une multitude de paramètres pour créer ou modifier aisément des fontes. L'utilisateur identifie les points par où passeront les traits ainsi que le type de plume pour les dessiner et le programme génère le contour construit par des courbes de Bézier et remplit l'intérieur de noir.



À titre d'exemple, le contour du « a » de la police « Computer Modern » dans la fonte CM roman, CM bold extended et CM typewriter

### Mécanique de l'affichage

La formule générale d'une courbe de Bézier de degré 3 est une courbe paramétrée vectorielle :

$$B(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1t(1-t)^2 + 3P_2t^2(1-t) + P_3t^3, \text{ où } t \in [0,1].$$

$$\text{et: } \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

L'algorithme de de Casteljau permet de diviser une courbe de Bézier en plusieurs autres. C'est cela qui permet à un ordinateur de conserver la qualité de l'image peu importe le zoom.

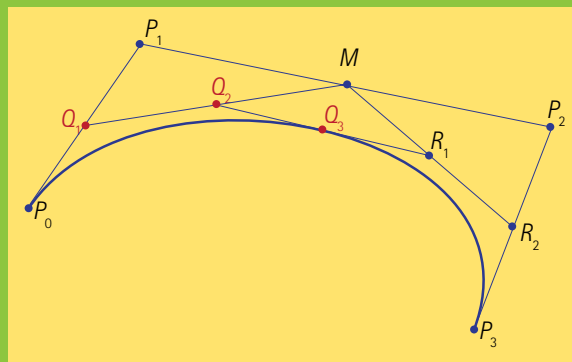
L'algorithme, qui fonctionne peu importe le degré de la courbe, va comme suit pour le troisième degré :

1. Pour une courbe de Bézier définie par  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , les points médians de  $P_0P_1$ , de  $P_1P_2$  et de  $P_2P_3$  sont trouvés et identifiés,  $Q_1, M$  et  $R_2$ .
2. Les points médians de  $Q_1M$  et de  $MR_2$  sont trouvés et nommés  $Q_2$  et  $R_1$ .
3. Le point  $Q_3$  (ou  $R_0$ ) est le point milieu du segment  $Q_2R_1$ .

La courbe initiale se divise en deux nouvelles courbes de Bézier : paramétrées respectivement par  $P_0, Q_1, Q_2, Q_3$  et  $Q_3, R_1, R_2, P_3$ . Il est possible de le définir de façon moins géométrique :

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Avec cet algorithme, lorsque l'utilisateur zoome sur une partie de la courbe, l'ordinateur calcule un nombre suffisant de courbes de Bézier afin que l'affichage par pixels paraisse lisse aux yeux humains. Sachant qu'il est possible d'afficher une courbe de Bézier de façon lisse à échelle 1, si l'échelle double alors le programme affichera simplement la moitié de la courbe avec la même précision puisque ce qui est affiché est aussi une courbe de Bézier!



Cette excursion illustre très bien la force de l'abstraction mathématique: utiliser une méthode très générale pour résoudre un problème prend certes plus de temps, mais elle peut alors être utilisée ultérieurement dans plusieurs autres domaines. La prochaine fois que vous lirez un texte, prenez un moment pour admirer le travail typographique caché

derrière les lettres. Le résultat de plusieurs années d'efforts se cache dans une police de caractères pour vous offrir une lecture confortable. Et si vous lisez cet article sur votre ordinateur en format pdf, élargissez un peu l'image pour voir la magie des courbes de Bézier à l'œuvre!

# Les Vendredis

## Rubrique des Paradoxes

# 13

**Jean-Paul Delahaye**  
Université des Sciences  
et Technologies de Lille

Certains pensent que le vendredi 13 porte bonheur. On les nomme

*triskaidekamaniaques,*

d'autres, à l'inverse, considèrent qu'une telle date attire les malheurs, ce sont les

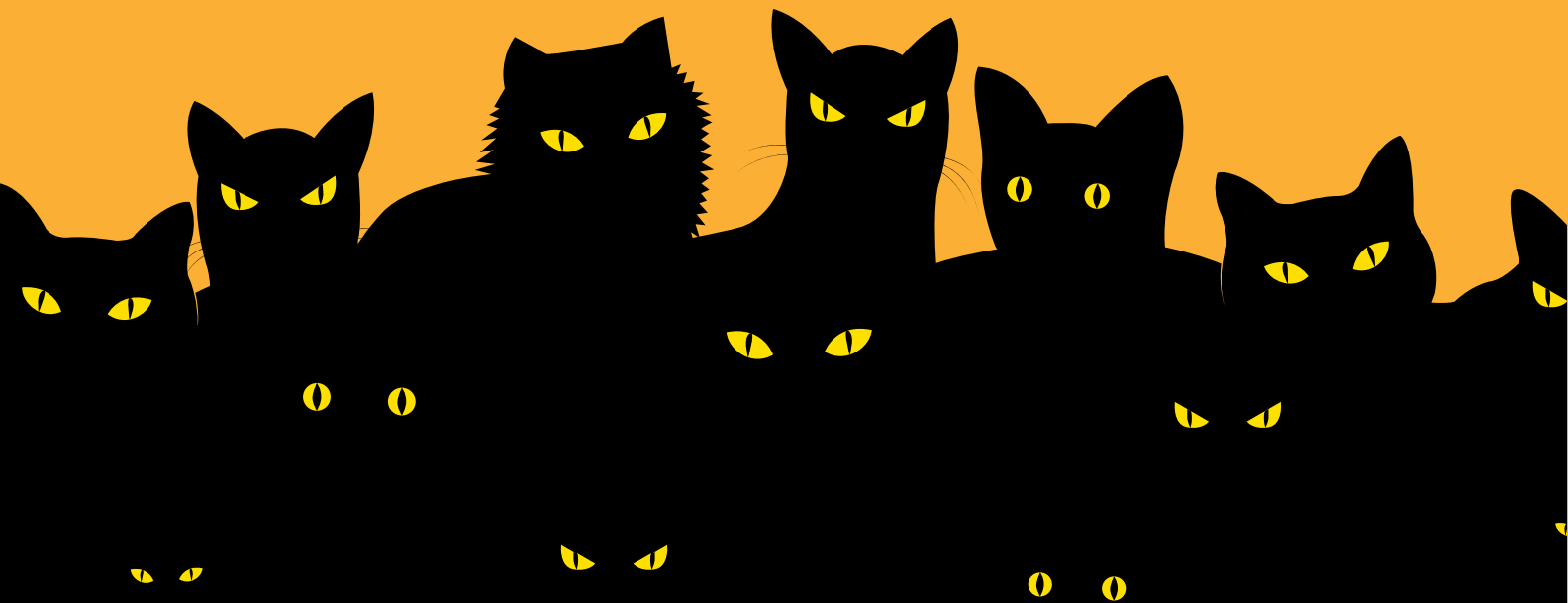
*triskaidekaphobes.*

La question de la fréquence des vendredis 13 est donc cruciale et doit être étudiée avec soin. Le bon sens élémentaire souffle qu'il n'y a aucune raison pour que le 13 d'un mois soit plus souvent un vendredi qu'un lundi ou que n'importe quel autre jour de la semaine. Une simple règle de 3 nous conduit même à l'affirmation que le 13 d'un mois est un vendredi une fois tous les sept mois en moyenne, et qu'en conséquence leur fréquence par an est de  $12/7$ , c'est-à-dire 1,7142857.

Même si cela vous paraît paradoxal, tout cela est faux ! Il y a plus de vendredi 13 que de lundi 13, de mardi 13, de mercredi 13, de jeudi 13, de samedi 13 et de dimanche 13. Le nombre moyen de vendredi 13 chaque année est précisément : 1,72 et non pas 1,7142857.

**Saurez-vous expliquer pourquoi ?**

**Voici un indice :** l'explication est liée au fait – paradoxal lui aussi – que le 6 octobre 1582, aucun enfant ne vit le jour en Espagne, au Portugal et en Italie.





# Transmission de pensée

## Rappel de l'énoncé

Michel a demandé à trois personnes de prendre une feuille de papier et un crayon. Pierre, Leila et moi avons été volontaires. Chacun a été invité à écrire un nombre de trois chiffres dont le premier et le dernier chiffres diffèrent l'un de l'autre d'au moins deux unités. J'ai choisi le nombre 752. J'ignore quels nombres ont été choisis par Pierre et Leila. Michel nous a demandé d'inverser l'ordre des chiffres et de soustraire le plus petit des deux nombres de trois chiffres du plus grand. J'ai donc fait la soustraction  $752 - 257$ , ce qui m'a donné 495. Pierre et Leila de leur côté ont fait un calcul analogue à partir du nombre que chacun avait choisi. Michel nous a ensuite demandé d'inverser les chiffres du résultat obtenu et d'ajouter cet inverse au résultat précédent. J'ai calculé  $495 + 594 = 1089$ . Pierre et Leila, de leur côté, ont fait l'opération. Michel nous a demandé, à son signal, de lire à voix haute, en même temps, le résultat de notre calcul. Il nous a fait un signe. Pierre, Leila et moi avons tous les trois en même temps lu : mille quatre-vingt-neuf. Comment a-t-il fait pour nous forcer à trouver tous les trois le résultat 1089 ?

La réponse est très simple : quel que soit le nombre de trois chiffres que vous choisissiez en respectant les consignes (un écart de deux unités au moins entre le premier chiffre et le dernier), vous trouverez 1089 à l'issue du calcul demandé par Michel. Si vous en doutez, vous pouvez faire un programme d'ordinateur qui vérifiera tous les cas possibles (il y en a moins de mille), mais un petit calcul algébrique est tout aussi rapide. Le nombre choisi est :

$$100a + 10b + c,$$

le nombre inversé

$$100c + 10b + a.$$

Supposons que  $a > c$  (le cas où  $a < c$  conduit aux mêmes calculs). La soustraction donne :

$$\begin{aligned} R &= 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) \\ &= 100(a - c) + (c - a) \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $c - a$  est négatif. Pour avoir le chiffre des unités de  $R$ , il faut ajouter 10 à  $c - a$  (cela correspond à la prise en compte de la retenue pour les unités dans l'opération de soustraction). La retenue des unités crée une retenue pour les dizaines et le chiffre des dizaines est donc 9. Le report de la retenue des dizaines conduit alors à retirer 1 au chiffre des centaines. Tout cela signifie que  $R$  s'écrit sous la forme :

$$R = 100(a - c - 1) + 90 + (10 - c + a).$$

On vérifie bien que

$$\begin{aligned} 100(a - c - 1) + 90 + (10 - c + a) \\ = 100(a - c) + (c - a). \end{aligned}$$

Nous savons donc que  $R$  possède :

- $a - c - 1$  comme chiffre des centaines,
- 9 comme chiffre des dizaines et
- $10 - c + a$  comme chiffre des unités. Si maintenant à  $R$ , on ajoute le nombre obtenu en inversant les chiffres de  $R$ , on trouve :

$$\begin{aligned} 100(a - c - 1) + 90 + (10 - c + a) \\ + 100(10 - a + c) + 90 + (a - c - 1) \end{aligned}$$

Tout se simplifie et aboutit à :

$$900 + 90 + 90 + 9 = 1089.$$

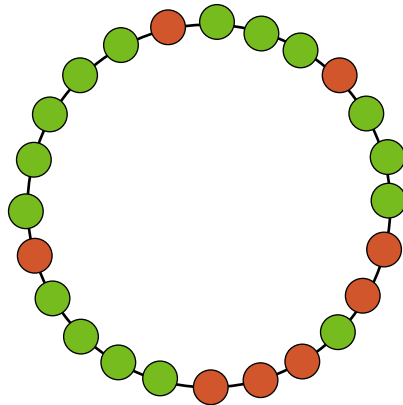
Michel n'a aucun pouvoir magique, il sait seulement que même si cent personnes font les calculs demandés, tous arriveront ensemble à 1089.



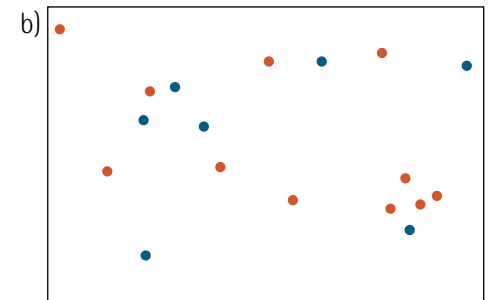
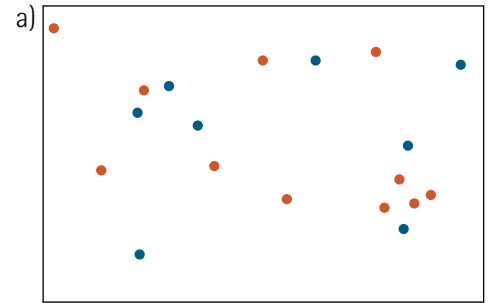
# Section problèmes

## Partage discret du collier

1. Un collier comprend  $2a$  perles rouges et  $2b$  perles vertes. Les deux voleurs qui l'ont dérobé ne connaissent pas la valeur des perles rouges et des perles vertes. Lorsqu'ils se séparent le collier en deux, ils veulent donc avoir chacun  $a$  perles rouges et  $b$  perles vertes. Montrez qu'ils peuvent le faire en coupant la chaîne du collier en deux endroits.



2. Montrer qu'il existe sur l'équateur terrestre deux points antipodaux qui ont la même température.
3. Étant donné un ensemble fini de points de couleur rouge et bleu dans le plan, montrer qu'il existe au moins une droite telle qu'il y ait le même nombre de points rouges et de points bleus de chaque côté de la droite. (Bien sûr si on a un nombre impair de points rouges ou bleus, alors la droite doit passer par certains points.)



## Analyse dimensionnelle

1. Une personne en haut d'une falaise de hauteur  $h$  laisse tomber un objet de masse  $M$  en chute libre avec une vitesse initiale  $v$ . Déterminer une relation entre le temps de chute  $T$  en fonction de  $h$ ,  $M$ ,  $v_0$  et de l'accélération gravitationnelle  $g$ .

# Pour en savoir plus!

## Applications des mathématiques

### Existe-t-il une stratégie gagnante ?

- Davis, Morton D., *La théorie des jeux*, Armand Colin, Paris, 1973.
- Rapoport, A., *Théorie des jeux à deux personnes*, Dunod, Paris, 1969.
- *The Essential John Nash*, Edité par Harold W. Kuhn et Sylvia Nasar, Princeton University Press, 2002.

### L'équilibre des unités en modélisation mathématique

- Illner, R., Bohun, C.S., McCollum, S., van Roode, T., *Mathematical Modelling: A case studies approach*. AMS, 2004.
- Stephens D.W. et Dunbar S.R., *Dimensional analysis in behavioral ecology*. Behavioral Ecology, 4 (1993), 172-183.
- Taylor G.I., (1950). *The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. I. Theoretical Discussion*. Proceedings of the Royal Society A. 201 (1065): 159-174.
- Taylor G.I., (1950) *The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. II. The Atomic Explosion of 1945*. Proceedings of the Royal Society A. 201 (1065): 175-186.

## Excursion typographique : La matrice des fontes

### Pour la partie Caractères Modernes :

- Knuth, D. E. (1989). *The METAFONTbook*.

### Pour la dyslexie :

- Dyslexie Font. Site télé-accessible à l'adresse. [<https://www.dyslexiefont.com/en/dyslexie-font/>](https://www.dyslexiefont.com/en/dyslexie-font/)  
Consulté le 8 août 2017.

### Pour la partie du vocabulaire typographique :

- Planète typographique. Site télé-accessible à l'adresse.  
[<http://www.planete-typographie.com/manuel/lexique.html>](http://www.planete-typographie.com/manuel/lexique.html) Consulté le 8 août 2017.

### Courbe de Bézier :

- Perrin, D. *Les courbes de Bézier*. Document télé-accessible à l'adresse.  
[<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/BezierDP.pdf>](https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/BezierDP.pdf)
- Bézier, P. (1968) *How Renault Uses Numerical Control for Car Body Design and Tooling*. Document télé-accessible à l'adresse. [<http://papers.sae.org/680010/>](http://papers.sae.org/680010/)

**Accromath** est une publication de l'Institut des sciences mathématiques (ISM) et du Centre de recherches mathématiques (CRM). La revue s'adresse surtout aux étudiantes et étudiants d'école secondaire et de cégep ainsi qu'à leurs enseignantes et enseignants.



L'Institut des sciences mathématiques est une institution unique dédiée à la promotion et à la coordination de l'enseignement et de la recherche en sciences mathématiques au Québec. En réunissant neuf départements de mathématiques des universités québécoises (Concordia, HEC Montréal, Université Laval, McGill, Université de Montréal, UQAM, UQTR, Université de Sherbrooke, Bishop's), l'Institut rassemble un grand bassin d'expertises en recherche et en enseignement des mathématiques. L'Institut anime de nombreuses activités scientifiques, dont des séminaires de recherche et des colloques à l'intention des professeurs et des étudiants avancés, ainsi que des conférences de vulgarisation données dans les cégeps. Il offre également plusieurs programmes de bourses d'excellence.

L'ISM est financé par le Ministère de l'Enseignement supérieur et par ses neuf universités membres.



Le Centre de recherches mathématiques est un centre national pour la recherche fondamentale en mathématiques et ses applications. Les scientifiques du CRM comptent plus d'une centaine de membres réguliers et de stagiaires postdoctoraux. Lieu privilégié de rencontre, le Centre est l'hôte chaque année de nombreux visiteurs et d'ateliers de recherche internationaux.

Les activités scientifiques du CRM comportent deux volets principaux : les projets de recherche qu'entreprennent ses laboratoires, et les activités thématiques organisées à l'échelle internationale. Ces dernières, ouvertes à tous les domaines, impliquent des chercheurs du CRM et d'autres universités. Afin d'assurer une meilleure diffusion des résultats de recherches de ses collaborateurs, le CRM a lancé en 1989 un programme de publications en collaboration avec l'American Mathematical Society et avec Springer.

Le CRM est principalement financé par le CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada), le FQRNT (Fonds québécois de recherche sur la nature et les technologies), l'Université de Montréal, et par six autres universités au Québec et en Ontario.

**Accromath** bénéficie de l'appui de la Dotation Serge-Bissonnette du CRM.

