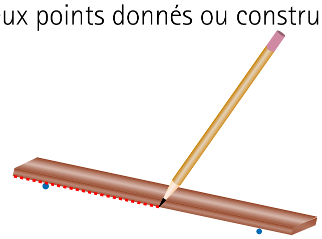
Été-automne 2016
Solutions

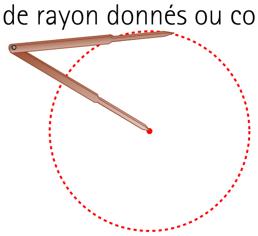
Mathématiques de l'Origami
Constructions à la règle et au compas

Dans les constructions à la règle et au compas, on dispose de deux outils :

- la règle qui permet de tracer la droite passant par deux points donnés ou construits.



- le compas qui permet de tracer un cercle de centre et de rayon donnés ou construits.



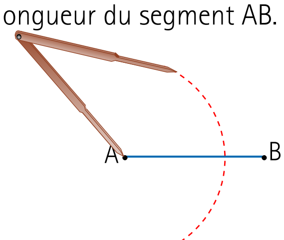
1. **Tracer la médiatrice d'un segment de droite.**

Solution

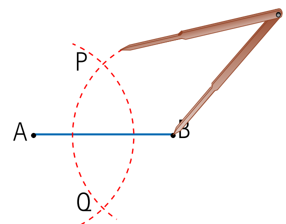
Soit AB un segment de droite.

A ———— B

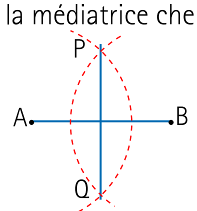
En prenant A comme centre, on trace un arc de cercle dont le rayon est plus grand que la moitié de la longueur du segment AB.



En conservant la même ouverture de compas et en prenant le point B comme centre, on trace un autre arc de cercle qui coupe le premier arc en déterminant des points P et Q.



Le point P est à égale distance de A et de B puisque les deux arcs de cercle ont même rayon. De même, le point Q est à égale distance de A et de B. Ce sont donc des points de la médiatrice. En traçant la droite passant par les points P et Q, on obtient la médiatrice cherchée.



Remarque :

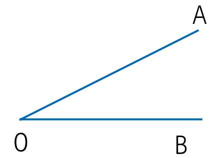
On utilise la même démarche pour déterminer le point milieu d'un segment de droite, c'est le point d'intersection du segment AB et de la médiatrice PQ.

2. a) **Tracer la bissectrice d'un angle formé par deux droites sécantes.**

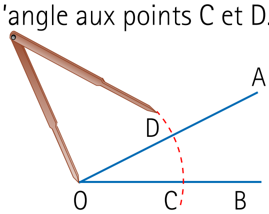
Solution

Par définition, la bissectrice d'un angle est la droite qui divise un angle en deux parties congruentes. C'est le lieu des points qui sont à égale distance des deux côtés de l'angle. Il nous faut donc construire un point qui est à égale distance des deux côtés de l'angle. En construisant le segment de droite passant par ce point et le sommet de l'angle, nous aurons alors la bissectrice de l'angle.

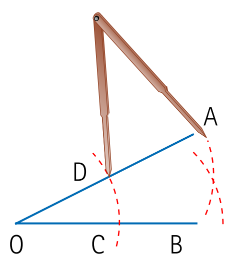
Soit un angle AOB formé par deux droites sécantes,



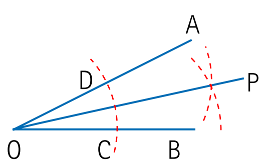
En prenant le sommet O de l'angle comme centre, traçons un arc de cercle qui coupe les côtés de l'angle aux points C et D.



En prenant maintenant C et D comme centres, traçons deux arcs de cercle de même rayon.



Ces arcs se coupent au point P. La droite passant par O et P est la bissectrice de l'angle AOB.



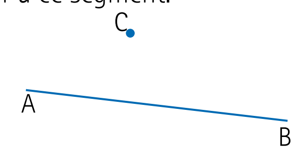
Remarque :

On peut appliquer à nouveau cette démarche pour tracer la bissectrice des angles AOP et POB. Ce faisant, on divise l'angle AOB en quatre angles égaux. Cependant. on ne peut diviser l'angle AOB en trois angles égaux (trisection de l'angle) en n'utilisant que la règle et le compas.

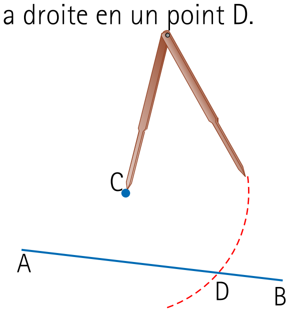
b) Construction d'une parallèle à une droite *D* passant par un point C extérieur à cette droite.

Solution

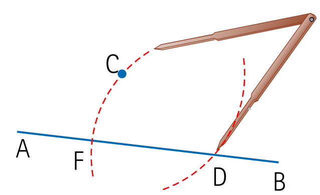
On veut tracer une droite, il faut donc en déterminer deux points.
Soit un segment de droite AB et un point C extérieur à ce segment.



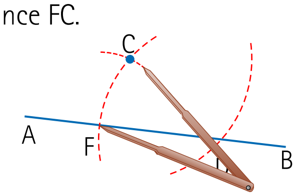
Du point C comme centre et avec un rayon quelconque, on trace un arc de cercle qui coupe la droite en un point D.



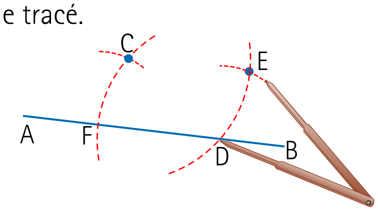
Prenant ce point comme centre et avec le même rayon, on trace un arc de cercle qui passe par C et qui coupe la droite en un point F.



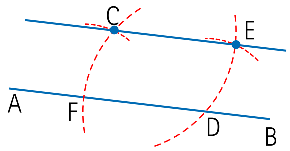
On prend comme ouverture du compas la distance FC.



Avec le point D comme centre et la distance FC comme rayon, on trace un arc de cercle qui détermine le point E sur le premier arc de cercle tracé.



La droite passant par C et par E est alors la parallèle cherchée.

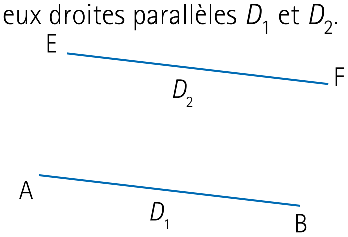


Remarque:
Le quadrilatère FCED est un parallélogramme.

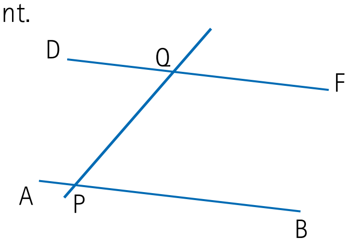
c) **Construction d'une parallèle équidistante à deux droites D_1 et D_2.**

Solution

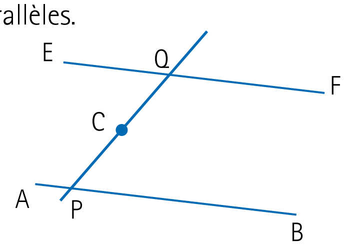
Pour tracer cette droite, il faut en déterminer deux points.
Soit deux droites parallèles D_1 et D_2.



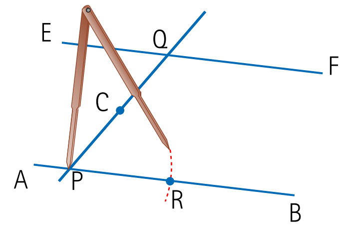
On trace une sécante à ces deux parallèles qui coupe celles-ci en P et en Q respectivement.



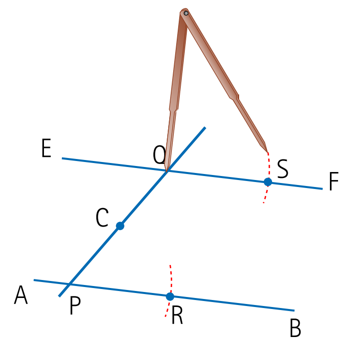
En appliquant la procédure du permier problème, on détermine le point milieu du segment PQ de la sécante compris entre les deux parallèles.



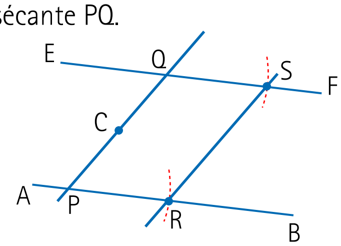
Diverses stratégies sont alors applicables. On peut procéder comme en b), en considérant le point milieu du segment PQ comme point extérieur à la droite D_1.
Il est cependant plus simple de déterminer avec le compas un point R sur la droite D_1 en prenant une ouverture de compas arbitraire.



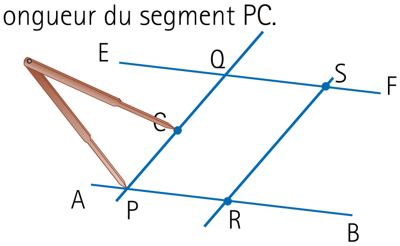
En conservant la même ouverture de compas, on détermine sur D_2 un point S sur la droite D_2.



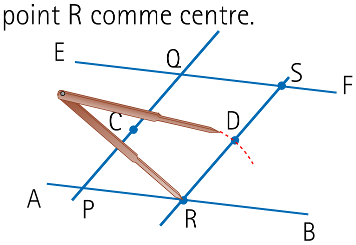
Le segment de droite RS est alors parallèle à la sécante PQ.



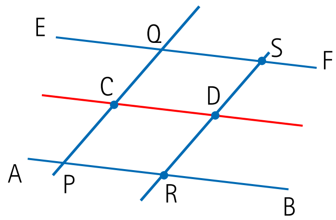
On ouvre le compas d'une largeur égale à la longueur du segment PC.



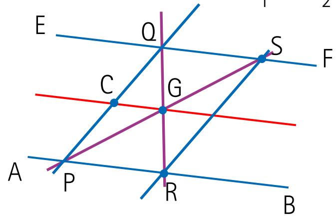
On reporte sur RS la longueur PC en prenant le point R comme centre.



Les points C et D sont deux points de la parallèle équidistante des droites D_1 et D_2.



Une autre façon de déterminer un deuxième point de la parallèle cherchée est de tracer les diagonales du parallélogramme. Leur point de rencontre est un point de la parallèle équidistante des droites D_1 et D_2.



3. **Construire à la règle et au compas la perpendiculaire à une droite *D* passant par un point P.**

Solution

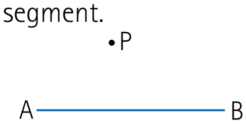
Le point P peut-être un point extérieur à la droite *D* et il peut être un point de la droite *D*. Si le point est extérieur à la droite, la construction consiste à *abaisser une perpendiculaire* du point P sur la droite *D*. Si le point est sur le droite *D*, la construction consiste à *élever une perpendiculaire* à la droite au point P. Les deux constructions sont une variante de celle pour tracer une médiatrice.

Abaisser une perpendiculaire

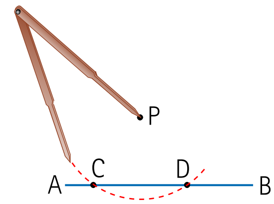
D'un point P hors d'une droite *D*, abaisser une perpendiculaire à cette droite.

Solution

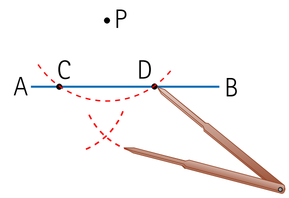
Soit un segment de droite AB et P un point extérieur à ce segment.



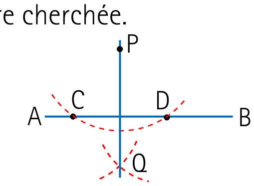
Du point P comme centre, on trace un arc de cercle qui coupe le segment de droite en deux points C et D.



En prenant successivement C et D comme centres, on trace des arcs de cercle qui se coupent en un point Q extérieur au segment de droite et situé du côté opposé de la droite par rapport au point P.



En joignant les points P et Q, on obtient la perpendiculaire cherchée.



En effet, le segment PQ est la médiatrice du segment CD. Ils sont donc perpendiculaires.

Remarque :

Cette construction est utilisée entre autres pour abaisser la hauteur d'un trangle.

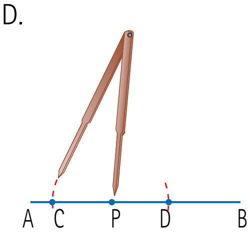
Élever une perpendiculaire à une droite

D'un point P sur une droite *D*, élever une perpendiculaire à cette droite.

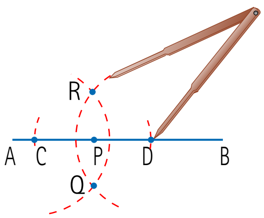
Solution

Soit un segment de droite AB et P de ce segment.

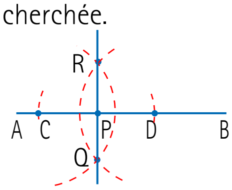
Du point P comme centre, on trace des arcs de cercle qui coupent le segment de droite en deux points C et D.



En prenant successivement C et D comme centres, on trace des arcs de cercle qui se coupent en des points R et Q extérieurs au segment de droite.



En joignant les points R et Q, on obtient la perpendiculaire cherchée.



En effet, le segment RQ est la médiatrice du segment CD. Ils sont donc perpendiculaires et le point P est le point d'intersection des deux segments.

Remarque :

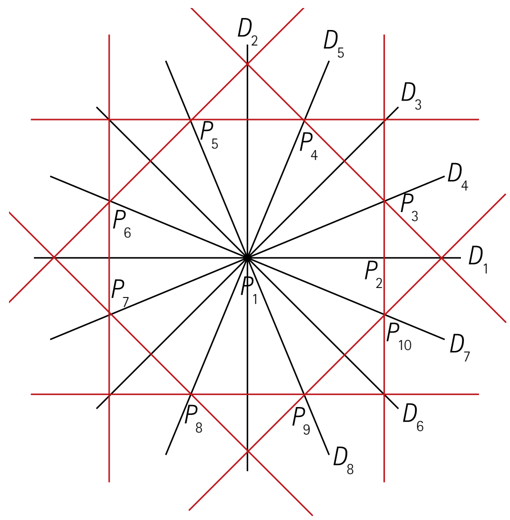
Initié aux mathématiques par le pythagoricien Archytas de Tarente, le philosophe Platon, n'acceptait que les constructions à la règle et au compas. C'étaient les seules constructions compatibles avec sa théorie du Monde des Idées. Trois problèmes de construction à la règle et au compas sont restés célèbres sous l'appellation *Problèmes de l'Antiquité*, ce sont : la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube.

Voir à ce sujet : *Des constructions impossibles !* de Jérôme Fortier, dans *Accromath*, Vol. 4.1, hiver-printemps 2009.

4. **Construire un octogone régulier en Origami.**

Pour construire un octogone en Origami on se donne deux points P_1 et P_2. On fait le pli D_1 passant par ces deux points (axiome O_1). La droite D_2 est la perpendiculaire à D_1 passant par P_1 (axiome O_4). La droite D_3 est obtenue en amenant D_1 sur D_2 (axiome O_3). La droite D_4 est obtenue en amenant D_1 sur D_3. Etc. pour les autres droites noires qui sont toutes obtenues comme bissectrices par l'axiome O_3.

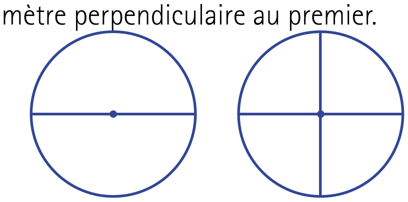
On commence maintenant les plis rouges qui seront les côtés de l'octogone de centre P_1 et passant par P_2. Le premier est le pli perpendiculaire à D_1 passant par P_2 (axiome O_4). Il coupe D_4 en P_3, qui est le premier sommet de l'octogone. Le deuxième pli est le pli perpendiculaire à D_3 passant par P_3 (axiome O_4). Il coupe D_5 en P_4, qui est le deuxième sommet de l'octogone. Le troisième est le pli perpendiculaire à D_2 passant par P_4 (axiome O_4). Il coupe D_8 en P_5, qui est le troisième sommet de l'octogone. Etc.



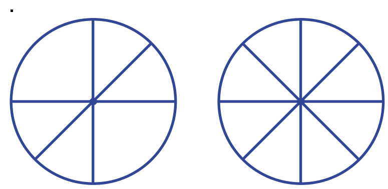
Octogone à la règle et au compas

On peut inscrire dans un cercle un octogone à la règle et au compas en utilisant la procédure pour tracer la médiatrice d'un segment et celle pour tracer la bissectrice d'un angle.

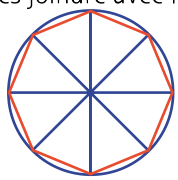
On trace d'abord un diamètre du cercle et la médiatrice de ce diamètre. On obtient alors un diamètre perpendiculaire au premier.



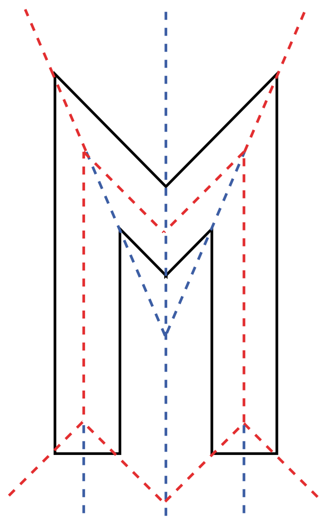
On trace ensuite les bissectrices des angles de 90°.



Les points d'intersection des diamètres et de la circonférence sont les sommets de l'octogone, il ne reste qu'à les joindre avec la règle.



5. **Construire la lettre M avec un seul coup de ciseau en Origami.**



Glanures mathématico-littéraires

1. **Le bassin d'Ugolin.**

a) Puisque l'objectif est d'emmagasiner 400 mètres cubes d'eau, l'institutrice, nous dit Pagnol, visualise un bassin carré de 10 mètres de côté et de 4 mètres de profondeur.
Dans un premier temps, elle traduit ces mètres cubes en litres : cette unité de volume correspondant par définition à un décimètre cube — c'est-à-dire 0,001 m^3 —, le bassin nécessitera donc l'extraction de 400 000 litres de terre. Estimant alors à 2 kilos la masse d'un litre de terre, l'institutrice en arrive ainsi à 800 000 kilos pour la masse totale de terre à déplacer pour creuser le bassin.

b) Pagnol ne dit rien sur la manière dont l'institutrice arrive à l'estimation « une année et demie de travail d'un terrassier de métier » pour le temps nécessaire afin de creuser le bassin. Il s'agit ici évidemment d'un travail fait à la main, sans machinerie aucune…

Il n'est certes pas facile de saisir d'emblée la tâche du creusage « à la petite pelle » d'un trou de 400 m^3. Mais on peut commencer par un trou plus raisonnable, disons de forme cubique et de 1 m^3. Et on peut aussi faciliter la tâche à affronter en supposant que le sol est plutôt meuble. On estimera de plus, pour les fins du problème, qu'une pelletée équivaut à environ 1 litre de terre. Nous sommes donc face à l'extraction de 1000 litres de terre. En supposant que l'on maintienne le rythme d'une pelletée environ toutes les 5 secondes (ouf! — et sans pause-limonade…), on arrive approximativement à une heure et demie pour creuser ce trou.
(Nous laissons au lecteur intéressé le soin d'estimer le temps que prendrait un fossoyeur pour préparer le trou — disons de 2 m x 2 m x 1 m — devant accueillir une tombe, selon divers scénarios plus ou moins rigolos ou lugubres…)
Bien sûr, si le sol est rocailleux, ce qui peut arriver souvent après 30 ou 40 cm de profondeur, le temps de creusage s'en trouve augmenté, et souvent de façon très marquée.
Cependant là où les choses se corsent vraiment est lorsque le travail d'excavation se prolonge en profondeur… et conséquemment dans le temps. Surtout si, comme le suppose l'institutrice, il s'agit d'un travail fait par *un* terrassier (fût-il *de métier*)! On peut imaginer, au fur et à mesure que la profondeur du trou augmente, la complexité de l'installation requise pour qu'une personne *seule* puisse évacuer la terre de la fosse (levier, palan, etc.). Et tout le temps qu'il faut alors pour sortir un simple mètre cube du trou, mais à plus de 3 m de profondeur. Sans compter la nature du sol à une telle profondeur — surtout dans les contreforts du Massif de l'Étoile, en Provence, où se déroule l'intrigue de *Jean de Florette*.
Le bassin d'Ugolin requiert-il vraiment une année et demie de travail d'un terrassier de métier? Au lecteur d'en décider… Mais à l'évidence il faudra vraiment un très long temps pour mener une telle tâche à terme!

c) Les quatre murs du bassin, chacun de 10 m par 4 m, totalisent 160 m^2, tandis que le fond est de 100 m^2. On obtient ainsi un total de 260 m^2 de surface pour le revêtement du bassin. L'institutrice, aux dires de Pagnol, voyant le revêtement comme étant de 0,25 m d'épaisseur, arrive donc à 65 m^3 de maçonnerie. À 2 tonnes le mètre cube, on obtient ainsi 130 tonnes pour l'ensemble du revêtement.

Remarque :

On pourrait bien sûr retrouver l'estimation de l'épaisseur du revêtement en partant de deux faits connus :

i) la surface de ce revêtement est de 260 m^2;
ii) les 130 tonnes de maçonnerie que proclame l'institutrice, « à 2 tonnes le mètre cube », pointent vers 65 m^3.
Comme 260 = 65 x 4, on en conclut que l'épaisseur du revêtement est de 1/4 de mètre.

2. Racines cristallines.

a) On applique étape par étape l'algorithme donné pour trouver $\sqrt{55\,225}$.

1º On partage ce nombre en tranches de 2 chiffres, à partir des unités; la dernière tranche à gauche peut n'avoir qu'un chiffre.

$$\begin{array}{l|l} 5\ \ 52\ \ 25 & \qquad \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$

2º On écrit à la racine le plus fort chiffre dont le carré puisse être soustrait de la tranche de gauche.

$$\begin{array}{l|l} 5\ \ 52\ \ 25 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{4} & 2 \times 2 \\ 1 & \end{array}$$

3º À droite du reste, on descend la tranche suivante dont on sépare un chiffre à droite; la partie de gauche forme un dividende, et l'on prend pour diviseur le double du nombre déjà écrit à la racine.

$$\begin{array}{l|l} 5\ \ \cancel{52}\ \ 25 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\ 1\ \ 52 & 4 \end{array}$$

En descendant la tranche suivante, on obtient le nombre 152, dont on enlève le chiffre de droite, 2; on se demande alors combien de fois 4 (le double du nombre déjà à la racine) entre dans 15.

4º Le quotient est le chiffre suivant de la racine, ou un chiffre trop fort; on l'essaye en l'écrivant à droite du diviseur, et en multipliant le nombre ainsi formé par ce même chiffre; si le produit peut se retrancher du nombre formé par le dividende et le chiffre séparé, le chiffre essayé est exact et on l'écrit à la racine; sinon, on le diminue successivement d'une unité, jusqu'à ce qu'on arrive à une soustraction possible.

$$\begin{array}{l|l} 5\ \ 52\ \ 25 & 23 \\ \cline{2-2} \underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\ 1\ \ 52 & 43 \times 3 \\ \underline{1\ \ 29} & \\ \quad 23 & \end{array}$$

Comme le quotient de la division de 15 par 4 est 3, on considère le nombre 43 et on regarde si le produit 43 x 3 entre dans le reste 152 — ce qui est le cas. (Sinon on aurait essayé 42 x 2, etc., jusqu'à ce que la soustraction à partir de 152 puisse se faire.)

On répète les deux dernières opérations (3º et 4º), jusqu'à ce qu'on ait obtenu à la racine tous les chiffres cherchés.

$$\begin{array}{l|l} 5\ \ \cancel{52}\ \ \cancel{25} & 23 \\ \cline{2-2} \underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\ 1\ \ 52 & \cancel{43 \times 3} \\ \underline{1\ \ 29} & 46 \\ \quad 23\ \ 25 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 5\ \ 52\ \ 25 & 235 \\ \cline{2-2} \underline{4} & \cancel{2 \times 2} \\ 1\ \ 52 & \\ \underline{1\ \ 29} & \cancel{43 \times 3} \\ \quad 23\ \ 25 & \\ \quad \underline{23\ \ 25} & 465 \times 5 \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Abaissant la dernière tranche, on s'intéresse au nombre 232, que l'on cherche à diviser par 46, le double de 23. On obtient comme quotient 5, et on vérifie que le produit 465 x 5 entre bien dans 2 325.

Remarques :

i) On aura compris que le mot « quotient », dans la discussion qui précède (étape 4), est à prendre dans le sens de quotient dans une *division euclidienne*, c'est-à-dire une *division avec res-*

te : la division de a par b mène à un quotient q et un reste r (tous les deux uniques) tels que

$$a = bq + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < b.$$

ii) Le texte cité pour décrire l'algorithme a un petit côté suranné. Ainsi, alors que certains des emplois du mot *chiffre* sont corrects selon l'usage actuel (par exemple, à l'étape 3, « on descend la tranche suivante dont on sépare un chiffre à droite »), d'autres ne le sont pas. C'est le cas notamment lorsque le texte parle du « carré d'un chiffre » (étape 2), qui est une expression inappropriée : il s'agit du carré d'un *nombre*. Dans le même esprit, on ne parlerait plus aujourd'hui du « plus fort nombre » (même si l'expression demeure amusante), mais bien du « plus grand nombre ».

iii) On décrit parfois le phénomène sous-jacent aux étapes 3 et 4 en omettant l'idée de division euclidienne et en procédant directement comme suit.

Ayant obtenu les premiers chiffres de la racine, on prend le double du nombre correspondant, et on cherche un chiffre qui, juxtaposé à la droite de ce double, donne un nouveau nombre tel que son produit avec le nombre à un chiffre en cause entre dans le reste en jeu à cette étape (ouf!).

Autrement dit, pour fixer les idées, dénotant par $ab...c$ (en numération décimale) le double du nombre alors à la racine, on cherche un chiffre z tel que le nombre $ab...cz$ (toujours en numération décimale), multiplié par le nombre z, puisse être soustrait du reste alors obtenu.

Pour donner un exemple concret, la dernière étape de la manipulation qui précède peut se voir comme suit : ayant le nombre 23 à la racine, on regarde son double, 46, et on cherche à lui juxtaposer à sa droite un chiffre z tel que $46z \times z$ entre dans 2325. On trouve $z = 5$, puisque $465 \times 5 = 2325$.

iv) Comme on peut s'en douter, l'algorithme d'extraction de racine décrit ici, parfois appelé « algorithme de la potence » dans le jargon scolaire, remonte, sous une forme ou sous une autre, à fort longtemps. Il repose pour l'essentiel sur le développement du binôme $(u + v)^2$ et sur la numération décimale (voir à ce propos la partie b). Aux dires de Chabert *et al.*,[1] il se retrouve, « sous différentes formes, en Chine ancienne au III^e siècle, en Inde et dans tout le bassin méditerranéen au Moyen Âge » (p. 235).

Il en est question notamment, au 18^e siècle, dans *L'arithmétique raisonnée et démontrée* de Leonhard Euler (1707-1783), ouvrage[2] publié de manière posthume (en français) à Berlin en 1792 — il s'agit de la traduction de son *Einleitung zur Rechenkunst*, paru à Saint-Pétersbourg en 1738. Euler y présente avec force détails la méthode d'extraction de la racine carrée (p. 416 *sqq*). Il y est même question d'extraction de racine cubique (p. 457 *sqq*).

On lira avec amusement (peut-être) la première application que donne Euler de l'algorithme pour la racine carrée (pp. 427-428) :

> *Si on vouloit former un bataillon quarré d'hommes avec 3249 soldats, combien il y en auroit-il de front & de flanc, c'est-à-dire, de chaque côté?*

Comme quoi les applications militaires des mathématiques ne remontent pas à hier...

b) Afin de mettre en évidence le fonctionnement de l'algorithme, revenons à l'extraction de $\sqrt{55\,225}$, mais en indiquant cette fois les véritables valeurs des nombres intervenant au cours du calcul :

5 52 25	235
4 00 00	~~200 × 200~~
1 52 25	
1 29 00	~~430 × 30~~
23 25	
23 25	465 × 5
0	

On observera que la première étape de l'algorithme, au cours de laquelle les chiffres formant le nombre 55 225 sont divisés en trois tranches, nous apprend que la racine recherchée (ou à tout le moins sa partie entière) est un nombre dont l'écriture décimale comporte trois chiffres. En effet, considérant les réels positifs (≥ 1) comme étant di-

1. *Jean-Luc Chabert et al.,* Histoire d'algorithmes : du caillou à la puce. *Belin, 1994.*
2. *Disponible à l'adresse* http://gallica.bnf.fr.

visés, selon leur grandeur, en tranches délimitées par des puissances paires successives de 10, on peut observer la manière dont s'accroît le nombre de chiffres de la partie entière de leur racine carrée, comme le montre la table suivante :

Intervalle auquel appartient x	Nombre de chiffres de la partie entière de $\sqrt{x}$
$[10^0, 10^2[$	1
$[10^2, 10^4[$	2
$[10^4, 10^6[$	3
$\vdots$	$\vdots$
$[10^{2n}, 10^{2(n+1)}[$	$n+1$

Étant donné que $10^4 \leq 55\,225 < 10^6$, on sait donc que la racine carrée de ce nombre aura trois chiffres.

Le calcul qui précède nous apprend que le nombre 235 est tel que $235^2 = 55\ 225$. Pour les fins de la discussion qui suit, supposons, sans véritable perte de généralité, que la racine carrée que l'on cherche est un nombre à 3 chiffres de la forme abc. On a donc :

$$(abc)^2 = (a\times 10^2 + b\times 10 + c)^2$$
$$= a^2\times 10^4 + 2ab\times 10^3 + b^2\times 10^2 + 2ac\times 10^2 + 2bc\times 10 + c^2.$$

Les trois produits inscrits à la droite sous la potence, dans la grille de calcul qui précède (pour $\sqrt{55\ 225}$), peuvent se voir comme visant à construire successivement les six termes figurant à la droite de cette dernière égalité.

- Le produit $40\,000 = 200 \times 200 = (2 \times 10^2) \times (2 \times 10^2)$ correspond au premier terme de cette somme :
$$(a \times 10^2) \times (a \times 10^2) = a^2 \times 10^4.$$
- Le produit $12\,900 = 430\times 30 = (43 \times 10) \times (3\times 10)$ revient aux deux termes suivants :
$(2a\times 10^2+b\times 10)\times(b\times 10) = 2ab\times 10^3+b^2\times 10^2$.
On notera ici que l'expression $2a$, du côté gauche de l'égalité qui précède, représente le double du premier chiffre à la racine, donc $2 \times 2 = 4$ dans l'exemple. On voit ainsi que :
$$(2a\times 10^2+b\times 10)\times(b\times 10)$$
$$=(4\times 10^2+3\times 10)\times(3\times 10) = 430\times 30.$$
- Enfin le produit $2\,325 = 465 \times 5$ renvoie aux trois derniers termes de la somme :
$$(2a\times 10^2+2b\times 10+c)\times c = 2ac\times 10^2+2bc\times 10+c^2.$$

Les deux expressions commençant par $2a$ et par $2b$, à la gauche de cette égalité, correspondent au double du nombre ab alors à la racine, à savoir $2 \times 23 = 46$ dans l'exemple.

Les commentaires que nous venons de faire pour le calcul d'une racine carrée formée de trois chiffres se transposeraient facilement (mais avec une notation plus lourde) à un cas général.

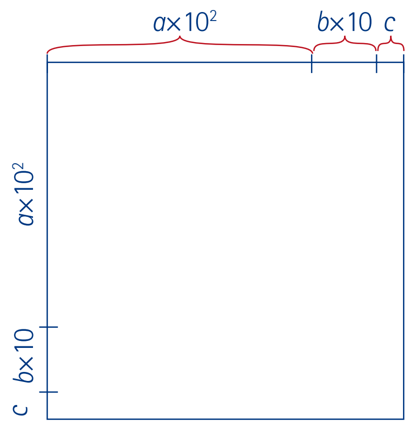
Remarques :

i) Si on s'intéresse à extraire la racine carrée d'un nombre — disons un carré parfait — inférieur à 10 000, on trouve alors comme racine un nombre à deux chiffres de la forme ab, c'est-à-dire $ab = a \times 10 + b$. Il suit alors
$$(a \times 10 + b)^2 = a^2 \times 10^2 + 2ab \times 10 + b^2.$$
On voit bien ici comment le tour de passe-passe « on double le nombre formé des chiffres apparaissant à la racine » peut être vu comme renvoyant au fameux terme $2uv$ dans le développement de $(u + v)^2$.

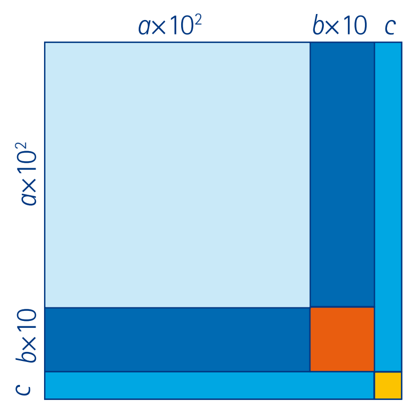
ii) Dans le cas d'un nombre qui n'est pas un carré parfait, cet algorithme d'extraction de la racine carrée se prolonge aisément en poursuivant « à la droite de la virgule » pour aller chercher le nombre de décimales souhaité. Il s'agit alors de regrouper les décimales du nombre dont on extrait la racine carrée par tranches de deux, à partir de la virgule et en allant vers la droite. Ainsi on trouverait trois décimales de la racine carré de l'entier 12 345 en s'intéressant à l'expression 12 345,000000, que l'on regrouperait comme 1 23 45, 00 00 00. Nous laissons aux soins du lecteur de vérifier que l'on trouverait ainsi 111,108.

iii) L'une des plus anciennes discussions à propos de cet algorithme d'extraction de la racine carrée se retrouve dans les commentaires écrits au 3e siècle de notre ère par le mathématicien chinois Liu Hui à propos du livre *Les Neuf chapitres sur les procédures mathématiques*, un classique de la littérature mathématique chinoise écrit à l'époque à la dynastie Han (~206 - 220). L'approche de Liu, il convient de le souligner, est géométrique.
Il se sert justement du calcul de $\sqrt{55\ 225}$ pour illustrer ses propos. Considérant un carré d'aire 55 225, il s'agit donc de trouver la longueur de son côté. Or Liu sait que cette longueur doit être un nombre formé de trois chiffres (voir à ce propos la discussion au début de la partie b).

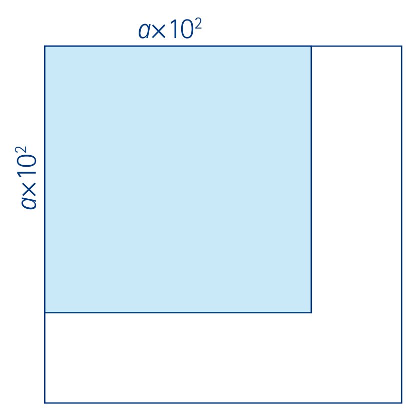
Le calcul de $\sqrt{55\,225}$ (à tout le moins pour la partie entière de cette racine) mène donc à un nombre de la forme *abc*. Liu propose de voir ce nombre $abc = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ comme étant la longueur du côté du carré d'aire 55 225.



Cette division en trois segments du côté mène à une dissection assez naturelle de l'intérieur du carré.

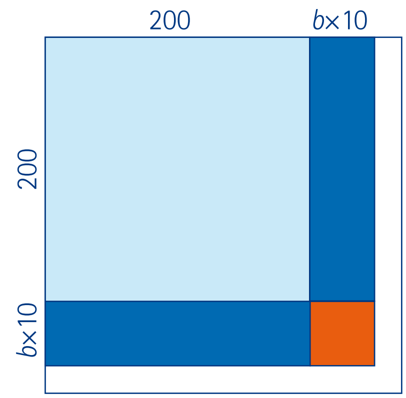


S'agissant tout d'abord du chiffre *a*, il faut trouver le plus grand multiple de 100 pouvant servir de côté pour un carré inscriptible dans le carré d'aire 55 225.



On voit immédiatement que $a = 2$, ce qui correspond à un carré de côté 200.

À l'étape suivante, il nous faut trouver le plus grand multiple de 10 tel que le « gnomon » (en forme de « L » inversé), sur la figure suivante, peut être inscrit dans la région restante, d'aire 15 225.



Ce gnomon est formé de *deux* rectangles et d'un petit carré. La plus grande valeur de *b* telle que l'aire du gnomon soit inférieure à 15 225 est 3 : on a alors deux rectangles de côté 200 et 30, et un carré de côté 30. On observera que l'aire du gnomon est alors donnée par

$$2(200 \times 30) + 30^2 = 12\,900.$$

Or par distributivité de la multiplication sur l'addition, le membre de gauche de cette égalité peut être ramené à

$$(2 \times 200 + 30) \times 30 = 430 \times 30,$$

c'est-à-dire au produit qui intervient lors du calcul du deuxième chiffre dans le déroulement de l'algorithme.

On aura observé que la consigne de doubler, à une étape donnée du calcul, le nombre formé des chiffres apparaissant à la racine correspond, géométriquement parlant, à la présence des deux rectangles bleu marine dans le gnomon qui précède.

Nous laissons au lecteur le soin de poursuivre le raisonnement géométrique, à partir de la figure de Liu, en ce qui concerne le troisième chiffre $c = 5$.

iv) Le lecteur intéressé à en savoir davantage à propos de divers algorithmes pour l'extraction de la racine carrée, y compris l'interprétation géométrique de Liu Hui, pourra consulter l'article : Bernard R. Hodgson, « Coups d'œil à saveur historique sur l'extraction de racine carrée. » *Bulletin AMQ* 46(2) (mai 2006), pp. 18-49.