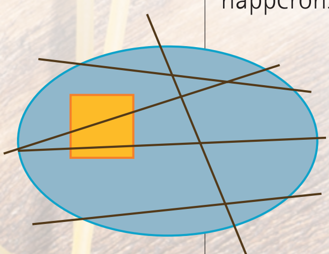
Géométrie intégrale

Vous échappez un spaghetti au dessus de la table. Quelle est la probabilité qu'il intersecte le napperon central ? Un tel problème appartient à la géométrie intégrale. Pourquoi ? Cela tient au type de réponse obtenue. Cette probabilité est le quotient du périmètre du napperon par le périmètre de la table pourvu que le napperon et la table soient convexes ! Et vous verrez que la technique de preuve n'est pas sans intérêt !

Christiane Rousseau
Guillaume Roy-Fortin
Université de Montréal

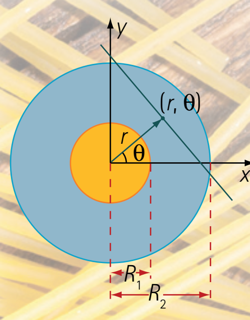
Vendredi soir, vous recevez de la visite imprévue et devez préparer un souper à la dernière minute. Faute de temps, vous convenez de faire des spaghetti, que la hâte vous fait malencontreusement échapper sur les jolis napperons aux formes géométriques simples que vous aviez déjà sortis. Vous voici donc à contempler le résultat de votre empressement : des spaghetti bien droits dispersés de manière aléatoire sur un napperon elliptique dans lequel est contenu un petit motif carré.



Au lieu de vous dépêcher de ramasser, vous commencez à réfléchir : certains spaghetti croisent le plus petit carré, d'autres non. Est-il possible de deviner cette proportion, du moins en moyenne ? Puisque vos invités arrivent bientôt, cet article vous sauvera du temps et vous fournira la réponse, au travers d'un petit voyage dans le monde de la géométrie intégrale. Mettez vos pâtes au feu et partons à la découverte du problème de Sylvester !

Deux exemples simples

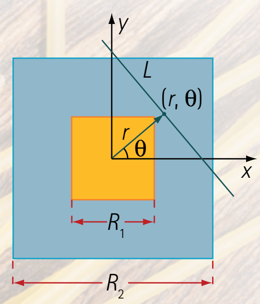
Regardons d'abord un petit disque de rayon R_1 à l'intérieur d'un grand disque de même centre et de rayon R_2. Prenons au hasard un spaghetti, c'est-à-dire une droite D, qui coupe le grand disque. Quelle est la probabilité qu'elle coupe le petit disque ?



Que signifie « prendre une droite au hasard » ? La droite est complètement déterminée par son *point podal*[1], qui est le point de la droite le plus près de l'origine. Ce point a pour coordonnées polaires (r, θ). Remarquons que θ est la direction perpendiculaire à la droite. Si on prend la droite au hasard, il est naturel de demander que θ soit uniformément distribué dans l'intervalle $[0°, 360°[$. Et si on suppose que la droite coupe le grand disque, alors r doit être uniformément distribué dans $[0, R_2]$. La droite coupe le petit disque si $r \leq R_1$. La probabilité qu'une droite qui coupe le grand disque coupe le petit disque est alors $P = R_1/R_2$. Remarquons que le petit disque est obtenu du grand disque par une homothétie de rapport

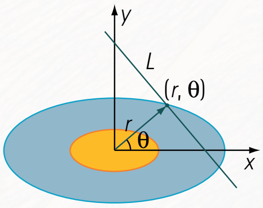
$$P = \frac{R_1}{R_2}.$$

Faisons le même exercice avec deux carrés pleins de côtés R_1 et R_2, de même centre, dont le second est image homothétique du premier. On peut se convaincre que la probabilité qu'une droite qui coupe la grande forme coupe aussi la petite est encore le rapport d'homothétie



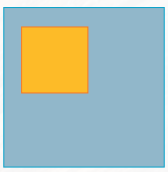
$$P = \frac{R_1}{R_2}.$$

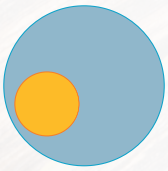
1. *Voir aussi « Construire une image médicale »,* Accromath, *volume 10.1*



Prenons maintenant deux ellipses concentriques dont la petite est une image homothétique de la grande. Cela n'a pas vraiment de sens de parler de quotient des longueurs. En revanche, on peut remarquer que le rapport d'homothétie est égal au quotient des périmètres des deux ellipses. De plus, étant donné une direction donnée par un θ quelconque, la probabilité qu'une droite perpendiculaire à cette direction coupe la petite ellipse, sachant qu'elle coupe la grande ellipse est encore égale au rapport d'homothétie. Donc, comme c'est vrai pour tout θ,

la probabilité P *qu'une droite qui coupe la grande ellipse coupe la petite ellipse est égale au quotient des périmètres des deux ellipses.*





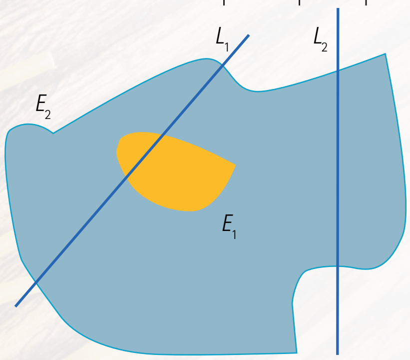
C'est également le cas pour nos deux premiers exemples, avec les deux disques et les deux carrés !

Est-ce encore vrai si le petit carré n'est pas centré dans le grand ? Ou pour d'autres types de formes ? Cela nous amène à la question posée par le mathématicien britannique J. J. Sylvester en 1889.

Le problème de Sylvester

On considère deux ensembles $E_1 \subset E_2$ du plan et la probabilité, P, qu'une droite quelconque L, prise au hasard et qui coupe E_2, coupe aussi E_1. Sous quelle condition cette probabilité est-elle égale au quotient du périmètre de E_1 sur le périmètre de E_2 ?

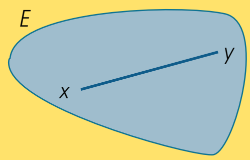
Nous verrons que c'est le cas dès que E_1 et E_2 sont convexes. Remarquons que le périmètre



Ensemble convexe

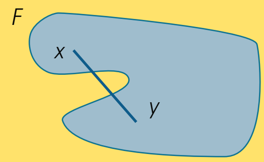
Un ensemble E est convexe si, pour toute paire de points x, y de E, le segment joignant les deux points, que l'on note $[x, y]$, est inclus dans E.

Ensemble convexe



E est un ensemble convexe : tous les segments $[x, y]$ sont inclus dans E.

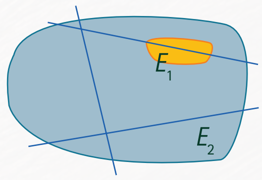
Ensemble non-convexe



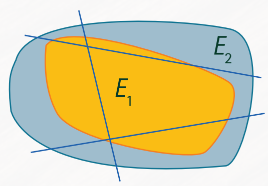
F n'est pas convexe, car il existe au moins un segment $[x, y]$ qui n'est pas inclus dans F.

de E_1 (ou E_2) est la longueur de sa frontière. Nous noterons la frontière de E_1 (ou E_2) par fr(E_1) (ou fr(E_2)).

Considérons des ensembles E_1 et E_2 tous deux convexes. Il semble plausible que la probabilité P dépende de la géométrie de ces ensembles. Illustrons cette intuition en considérant les deux exemples ci-contre.



Un petit ensemble convexe contenu dans un gros.



Un gros ensemble convexe contenu dans un ensemble de taille comparable.

Il est légitime de penser que la probabilité d'obtenir une intersection avec le petit ensemble sera plus petite dans le premier exemple que dans le second. Pourquoi ? S'agit-il du rapport entre les aires respectives des ensembles E_1 et E_2 ? Du diamètre de ces ensembles, ou alors de la distance entre leurs frontières respectives ? Ci-dessous, on montrera que c'est le rapport des longueurs des frontières des ensembles E_1 et E_2 qui est la propriété géométrique cruciale dans l'expression de la probabilité ! En effet, on aura :

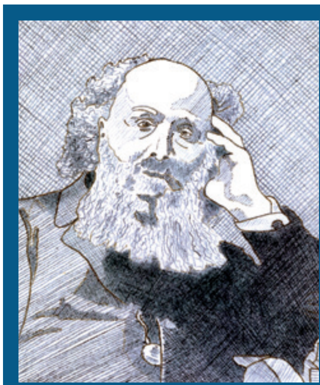
$$P = \mathrm{Prob}(L \text{ croise } E_1 \mid L \text{ croise } E_2) = \frac{\mathrm{Longueur}(\mathrm{fr}(E_1))}{\mathrm{Longueur}(\mathrm{fr}(E_2))}.$$

Paramétrer les droites dans le plan

Le problème de Sylvester porte sur le calcul de la probabilité qu'une droite L prise au hasard qui coupe E_2 coupe aussi E_1. C'est la probabilité conditionnelle

$$P = \mathrm{Prob}(L \text{ croise } E_1 \mid L \text{ croise } E_2).$$

On va transformer cela en un problème géométrique.



James Joseph Sylvester 1814-1897

James Joseph Sylvester est admis au St. John's College, à Cambridge, en 1833. Malgré de brillantes études, il n'obtient pas de diplôme car, à l'époque, il faut prêter allégeance à l'Église d'Angleterre pour recevoir un diplôme et Sylvester, qui est juif, refuse.

À partir de 1838, il enseigne la physique trois ans au University College de Londres, un des seuls établissements qui n'exerce pas de discrimination religieuse. En 1841, il accepte un poste à l'Université de Virginie, mais l'abandonne au bout de trois mois à cause de conflits avec des élèves. De retour en Angleterre, il ne parvient pas à trouver un emploi à la mesure de son talent et il pratique le droit et l'actuariat tout en donnant des cours privés de mathématiques. Durant cette période, il fait la connaissance d'Arthur Cayley qui exerce lui aussi le droit. Quoique de tempéraments différents, ils deviennent amis et échangent sur des problèmes mathématiques.

Toujours attiré par la carrière de professeur de mathématiques, Sylvester réussit à obtenir un poste au Royal Military Academy de Woolwich en 1854. Il y demeure jusqu'en 1869, l'âge de la retraite étant de 55 ans dans cet établissement. En 1877, il accepte la chaire de mathématiques du John Hopkins University et, en 1878, il fonde l'*American Journal of Mathematics*, soit le premier périodique mathématique aux États-Unis. En 1884, alors âgé de 70 ans, il retourne en Angleterre et occupe la chaire de géométrie d'Oxford. Il se retire en 1892, souffrant de pertes de mémoire et presque aveugle. Sylvester a réalisé d'importants travaux sur la théorie des matrices après avoir été sensibilisé à ce sujet lors de ses échanges avec Cayley. En particulier, il a utilisé la théorie des matrices pour étudier les géométries de dimension supérieure.

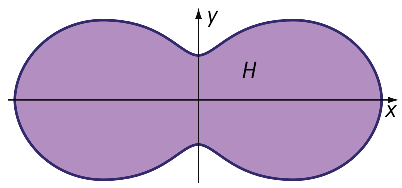
On a d'une part le plan Π de coordonnées (x, y), où $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, d'autre part, le plan Π' de coordonnées (θ, r), et la fonction $f:\Pi\to\Pi'$ définie par

$$(x,y)\mapsto f(x,y)=(\theta,r).$$

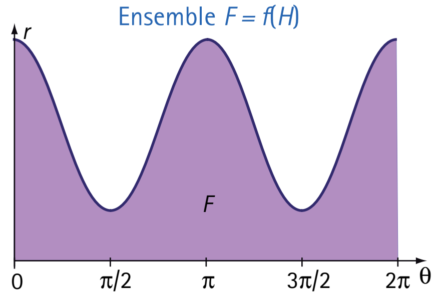
Cette fonction est assez subtile et nous allons l'explorer un peu. Commençons par remarquer que l'image du disque D de rayon R par f est simplement le rectangle $S = [0;\ 2\pi] \times [0;\ R]$. Regardons maintenant sur la figure l'ensemble H des points $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ du plan tels que

$$r \leq \cos^2\theta + 0{,}3$$

Ensemble H



Ensemble $F = f(H)$



Alors, l'image de H par la fonction f est

$$\{(\theta,r): 0\leq r\leq \cos^2\theta+0{,}3; \theta\in[0;2\pi]\}.$$

C'est donc l'ensemble situé entre l'axe et le graphe de la fonction

$$\theta\mapsto \cos^2\theta+0{,}3 \text{ dans le plan } (\theta,\ r).$$

Et on sait calculer son aire par une intégrale.

On va appliquer cette idée à notre problème. Ici, les choses se corsent, car on aura beaucoup d'ensembles... Alors, tenez-vous bien ! Regardons l'ensemble E_2. Dans le problème de Sylvester, on doit regarder l'ensemble des droites qui croisent E_2. Pour chacune de ces droites, on considère son point podal. Ceci nous donne un ensemble de points podaux de coordonnées $(x;\ y)$, que l'on appelle H_2.

H_2 est donc l'ensemble des points podaux des droites qui croisent E_2 : c'est un sous-ensemble de Π. On prend maintenant l'image de H_2 par f, que l'on appelle F_2. C'est un sous-ensemble du plan Π'. L'aire de F_2 nous donne alors une forme de « mesure » de la taille de l'ensemble des droites qui croisent E_2.

On fait la même chose avec E_1. On définit H_1 comme l'ensemble des points podaux des droites qui croisent E_1, et $F_1 = f(H_1)$. De nouveau, l'aire de F_1 nous donne alors une « mesure » de la taille de l'ensemble des droites qui croisent E_1.

Eh bien, la probabilité P cherchée est simplement le quotient de l'aire de F_1 par l'aire de F_2 :

$$P = \frac{\text{Aire}(F_1)}{\text{Aire}(F_2)}.$$

Mais pourquoi cette probabilité est-elle égale au quotient des périmètres de E_1 et E_2 ?

Pour le voir, nous allons faire un détour inattendu vers la formule de Crofton. On considère une courbe C de longueur ℓ, et L, une droite de point podal dans le disque D.

Quel est le nombre moyen de points d'intersection entre la courbe C et la droite L ?

Appelons $n(C \cap L)$, le nombre de points d'intersection entre la courbe C et la droite L. On doit donc calculer la moyenne m de $n(C \cap L)$. La surprise est que ce nombre est indépendant de la forme de la courbe C et dépend seulement de ℓ ! La formule de Crofton dit que ce nombre est égal à

$$m = \frac{2\ell}{2\pi R}.$$

(voir la démonstration dans l'encadré).

Un tel résultat est typique des résultats de la « géométrie intégrale », un domaine que le mathématicien irlandais Morgan Crofton a contribué à développer.

Voyons maintenant comment la formule de Crofton nous aide à résoudre le problème de Sylvester. Rappelons-nous que nous devons calculer les aires de F_1 et F_2. Considérons d'abord F_1. Prenons comme courbe C_1 la frontière de E_1, et soit ℓ_1, sa longueur. Comme E_1 est convexe, une droite L qui croise E_1 a deux points d'intersection avec sa frontière (lesquels peuvent éventuellement coïncider).

Donc, $n(C_1 \cap L) = 2$, chaque fois que L croise E_1 et $n(C_1 \cap L) = 0$ sinon. On peut donc se convaincre que la moyenne m_1 de $n(C_1 \cap L)$ vaut

$$m_1 = 2\frac{\text{aire}(F_1)}{\text{aire}(D)}.$$

D'autre part, par la formule de Crofton, cette moyenne vaut

$$m_1 = \frac{2\ell_1}{2\pi R}.$$

Donc,

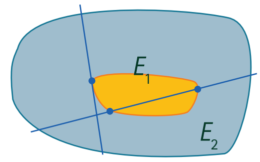
$$\text{aire}(F_1) = \ell_1 \frac{\text{aire}(D)}{2\pi R}.$$

De même, si C_2 est la frontière de E_2, et ℓ_2 est sa longueur,

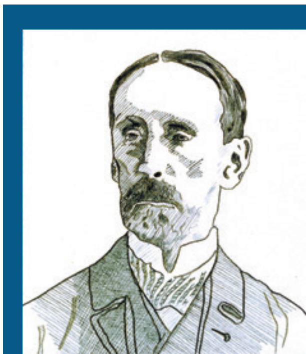
$$\text{aire}(F_2) = \ell_2 \frac{\text{aire}(D)}{2\pi R}.$$

En divisant ces deux équations, on obtient le résultat de Sylvester

$$P = \frac{\text{aire}(F_1)}{\text{aire}(F_2)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$



Les deux points d'intersection d'une droite et d'un convexe peuvent être confondus.



Morgan William Crofton 1826-1915

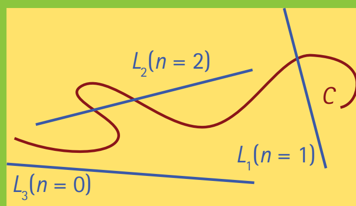
C'est au Trinity College de Dublin que Morgan Crofton a étudié les mathématiques. En 1847, il est major de sa promotion, mais n'est pas accepté comme « compagnon » car, à l'époque, l'institution réservait cet honneur aux anglicans et Crofton envisageait de devenir catholique.

Nommé professeur de philosophie naturelle au Queens College de Galway en 1849, Crofton occupe le poste durant trois ans. Il enseigne ensuite en France dans des collèges dirigés par des Jésuites. De retour en Angleterre, il fait la connaissance de Sylvester, qui occupe la chaire de mathématiques du Royal Military College de Woolwich.

En 1869, Sylvester a 55 ans et doit prendre sa retraite, conformément à la politique de l'armée. Il recommande Crofton comme successeur. Celui-ci se voit attribuer le poste en 1870 et l'occupe jusqu'en 1884, Il se joint alors à l'équipe de professeurs de mathématiques de University College de Dublin. En 1868, il publie *On the theory of local probability*, dans lequel il discute du problème de l'aiguille de Buffon.

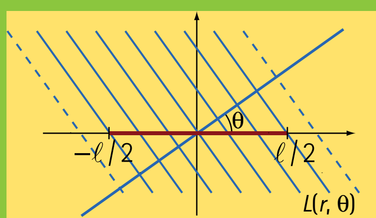
Idée de la démonstration de la formule de Crofton

Notre objectif est de calculer la longueur d'une courbe C en considérant le nombre d'intersections qu'elle possède avec chacune des droites L du plan.



Premier cas

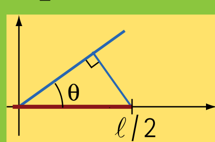
C est un segment de droite de longueur ℓ. Sans perte de généralité, on peut supposer que le segment est sur l'axe des x centré à l'origine.



Si le point podal d'une droite L a pour coordonnées polaires (θ, r), alors on notera cette droite $L(\theta, r)$. Si L intersecte le segment C, alors

$$\frac{r}{|\cos\theta|} \in \left[0, \frac{\ell}{2}\right],$$

ou encore $r \leq \frac{\ell}{2}|\cos\theta|$.

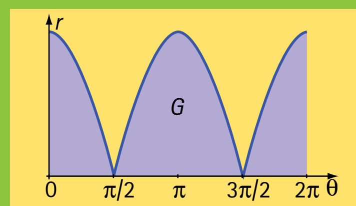


On appelle G l'ensemble des points du rectangle $S = [0, 2\pi] \times [0, R]$, dont les coordonnées polaires (θ, r) satisfont à l'équation précédente.

Aussi, pour chaque droite L qui coupe C, on a $n(L, C) = 1$. Donc, la moyenne m de $n(L, C)$ vaut aire(G)/aire(S).

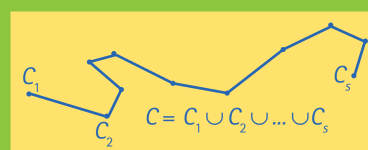
Il suffit donc de calculer les deux aires. On a aire$(S) = 2\pi R$. Quant à l'aire de G, elle se calcule comme une intégrale

$$\text{aire}(G) = 4\int_0^{\pi/2} \frac{\ell}{2}\cos\theta \, d\theta = 2\ell.$$



Deuxième cas

C est une réunion de segments de droite :



$C = C_1 \cup \,...\, \cup C_s$, alors, $\ell = \ell_1 + ... + \ell_s$. Soit $n_i = n(L(\theta, r), C_i)$ le nombre de points d'intersection d'une droite $L = L(\theta, r)$ avec C_i, et $n = n(L(\theta, r)), C)$, le nombre de points d'intersection de L avec C. Alors, la moyenne m_i de $n_i = n(L(\theta, r), C_i)$ vaut

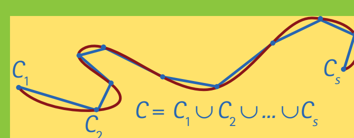
$$m_i = \frac{2\ell_i}{2\pi R}.$$

Donc, $m = m_1 + ... + m_s$

$$= \frac{2\ell_1 + ... + 2\ell_s}{2\pi R} = \frac{2\ell}{2\pi R}.$$

Cas général

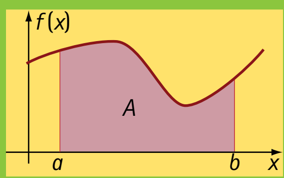
Pour une courbe générale, on considère une approximation de la courbe par une réunion de petits segments et on prend la limite quand la longueur des segments tend vers zéro.



La géométrie intégrale

Regardons l'exemple suivant.

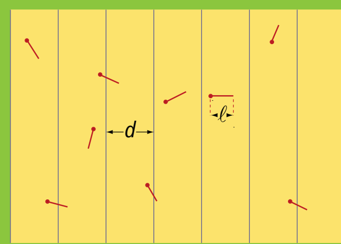
Si $f(x)$ est une fonction positive continue, l'aire sous la courbe entre les deux droites $x = a$ et $x = b$ est donnée par



Une quantité géométrique, en occurrence l'aire, est déterminée par un moyen analytique, l'intégrale. Cet exemple est typique de la *géométrie intégrale* : celle-ci est le domaine des mathématiques qui se sert d'outils *analytiques*, comme par exemple le calcul différentiel et intégral, pour obtenir des informations de nature *géométrique*. Ces informations géométriques peuvent être *déterministes* comme une longueur, une aire, un volume, ou encore *probabilistes* comme, par exemple, la probabilité qu'un spaghetti échappé sur un napperon traverse l'un ou l'autre des motifs géométriques contenus dans le napperon.

C'est cependant l'aiguille de Buffon qui est considérée comme l'acte de naissance de la géométrie intégrale, un domaine qui n'a cessé de prendre de l'expansion depuis !

Imaginez un plancher couvert de lignes parallèles qui sont toutes à une distance d l'une de l'autre. Vous prenez une aiguille de longueur $\ell < d$ et vous la laissez tomber aléatoirement sur le sol. Quelle est la probabilité P que l'aiguille croise l'une des lignes parallèles ?



C'est l'expérience qu´a menée le Comte de Buffon (1707-1788), qui a obtenu le résultat surprenant suivant : la probabilité P de croisement est donnée par

$$P = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

Si on répète l'expérience, le rapport entre le nombre d'occurrences c où l'aiguille croise une ligne et le nombre total de lancers n donne une approximation de P, soit $P \approx c/n$. Cela permet d'estimer expérimentalement la valeur de π :

$$\pi \approx \frac{2\ell n}{cd}.$$

En fait, avec les outils que nous avons développés, vérifier la valeur de P devient très simple. Nous vous y convions à la section « Problèmes ».

Georges Louis Leclerc, comte de Buffon 1707-1788

Georges-Louis Leclerc est surtout connu pour son œuvre de naturaliste. Il s'est consacré très tôt à l'étude des sciences. En 1739, il est admis à l'Académie des sciences et nommé intendant du Jardin du Roi. Profitant des ressources offertes par l'établissement qu'il dirige, il se consacre à l'histoire naturelle.

Dans son *Essai d'arithmétique morale* publié en 1777, il présente le fameux problème de l'aiguille.Il montre que la probabilité qu'une aiguille de longueur ℓ, lancée sur un parquet dont les lattes ont une largeur $d = \ell$, coupe le bord d'une latte est

$$P = \frac{2}{\pi}.$$

Dans le cas plus général où les lattes ont une largeur $d > \ell$, la probabilité est

$$P = \frac{2\ell}{\pi d}.$$