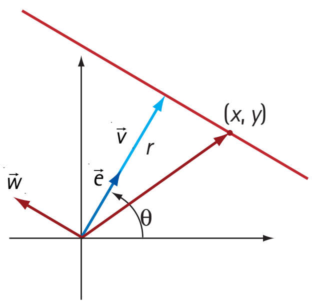
Hiver-printemps 2015
Solutions

Construire une image médicale

Un vecteur directeur de la droite est le vecteur $\vec{w} = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

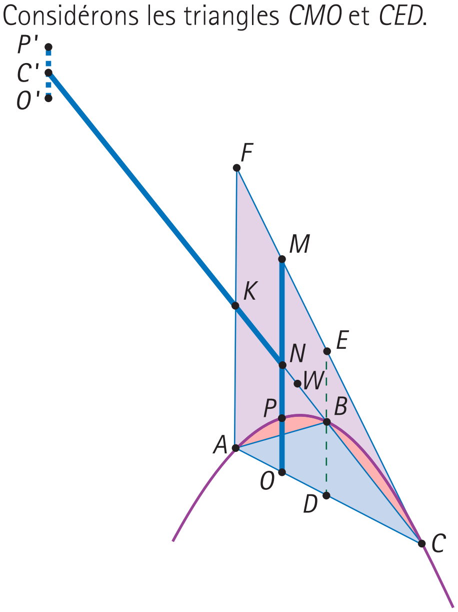


L'ensemble des points de la droite est l'ensemble $\{\vec{v} + s\vec{w} \mid s \in \mathbb{R}\}$. Comme $\vec{v} \cdot \vec{w}$, alors

$$\begin{aligned}\vec{e}(\cdot\vec{v} + s\vec{w}) &= \vec{e} \cdot \vec{v}\\ &= |\vec{e}||\vec{v}|\cos(\vec{e},\vec{v})\\ &= r.\end{aligned}$$

Confidences d'Archimède

1. a) Considérons les triangles *CMO* et *CED*.



Puisque *ED* est parallèle à *MO*, ces triangles sont semblables (observez leurs angles), de sorte que leurs côtés homologues sont proportionnels; en particulier, on a

$$\frac{MO}{ED} = \frac{CO}{CD}.$$

De la même manière, on voit que les triangles *CNO* et *CBD* sont eux aussi semblables, ce qui entraîne l'égalité de rapports

$$\frac{NO}{BD} = \frac{CO}{CD}.$$

On en tire

$$\frac{NO}{BD} = \frac{MO}{ED},$$

et donc

$$\frac{NO}{MO} = \frac{BD}{ED}.$$

Or, tel que mentionné dans l'article d'*Accromath* (p. 20), *B* est le point milieu de *ED* (il s'agit là d'une propriété des paraboles bien connue à l'époque d'Archimède : ce dernier ne fait que rappeler ce résultat à la proposition 2 de son traité *La quadrature de la parabole*). Cela signifie donc que

$$\frac{BD}{ED} = \frac{1}{2}$$

et, par conséquent,

$$\frac{NO}{MO} = \frac{1}{2},$$

montrant ainsi que *N* est le point milieu de *MO*.

b) Le segment FA étant parallèle au segment MO, les triangles CKA et CNO sont semblables, pour les mêmes raisons que précédemment. Il suit donc que

$$\frac{CN}{CK} = \frac{CO}{CA}.$$

Puisque $CN = CK - KN$ et $CO = CA - AO$, on obtient

$$\frac{CK - KN}{CK} = \frac{CA - AO}{CA},$$

c'est-à-dire

$$1 - \frac{KN}{CK} = 1 - \frac{AO}{CA},$$

et donc

$$\frac{KN}{CK} = \frac{AO}{CA}.$$

On fait maintenant appel à une autre propriété des paraboles : tel que mentionné dans l'article (p. 20), on a l'égalité de rapports

$$\frac{MO}{OP} = \frac{CA}{AO}.$$

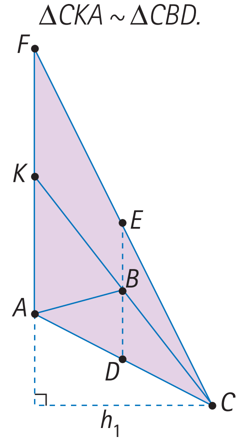
(Archimède présente cette relation à la proposition 5 de *La quadrature de la parabole*). Combinant les deux dernières égalités, on trouve finalement

$$\frac{MO}{OP} = \frac{CK}{KN},$$

tel que demandé.

2. a) Observons tout d'abord que K est le milieu de AF. Ce fait découle du même raisonnement que celui qui a permis, à la question 1-a, de montrer que N est le milieu de MO — il s'agit cette fois de considérer les similitudes suivantes de triangles :

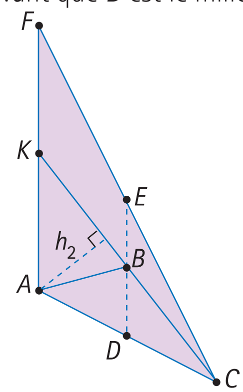
$$\Delta CFA \sim \Delta CED,$$
$$\Delta CKA \sim \Delta CBD.$$



Considérant les deux triangles ACF et ACK, on voit qu'ils ont une même hauteur h_1 issue du sommet commun C. Comme la base AF du premier triangle est le double de la base AK du second, on a donc

$$Aire(\Delta ACF) = 2 \times Aire(\Delta ACK).$$

b) De la même manière que précédemment, on peut se convaincre que le point B est situé au milieu de CK — on regarde maintenant les deux triangles semblables CKA et CBD, tout en observant que D est le milieu de AC.



Abaissant une perpendiculaire à partir du sommet commun A sur CK, on voit que h_2 est hauteur à la fois du triangle ACK et du triangle ABC. Et comme CK est le double de BC, on a bien sûr

$$Aire(\Delta ACK) = 2 \times Aire(\Delta ABC).$$

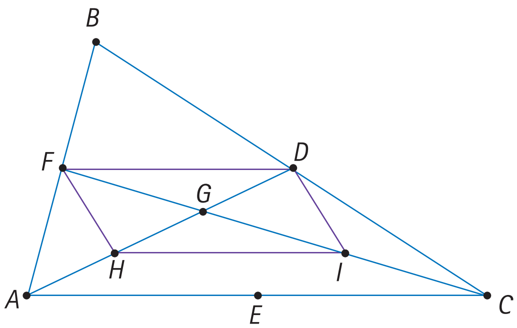
Et on conclut finalement que

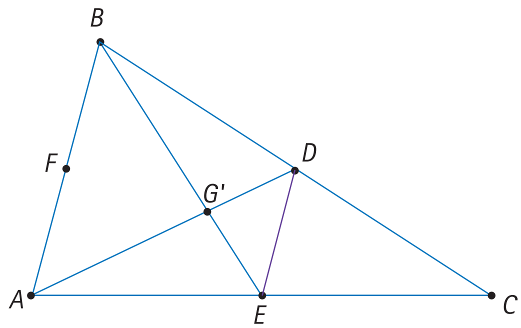
$$Aire(\Delta ACF) = 4 \times Aire(\Delta ABC).$$

3. a) Considérons tout d'abord les triangles ABC et FBD. Les données du problème font que ces deux triangles sont semblables, ce qui peut se justifier de diverses façons. Par exemple, les points D et F étant situés respectivement au milieu de BC et de AB, on a l'égalité de rapports

$$\frac{BF}{BA} = \frac{BD}{BC},$$

de sorte que les segments DF et AC sont parallèles — on utilise ici la réciproque de ce qu'il est convenu d'appeler le *théorème de Thalès* (voir Note 2). De plus, par similitude des triangles et en vertu des rapports de proportionnalité, on a que la longueur de DF est la moitié de celle de AC.





Passant maintenant au triangle *AGC*, comparons-le avec le triangle *HGI*. Un raisonnement analogue montre que ces deux triangles sont semblables, et que la longueur de *HI* est elle aussi la moitié de celle de *AC*.
Il suit donc que les segments *DF* et *HI* ont même longueur. Comme ils sont de plus parallèles (étant tous deux parallèles à *AC*), on en conclut que le quadrilatère *DFHI* est un parallélogramme.

b) Le point *G* étant à l'intersection des diagonales du parallélogramme *DFHI*, on a donc $HG = GD$ d'une part, et $FG = GI$ d'autre part. Mais comme *H* et *I* sont respectivement le milieu de *AG* et de *CG*, on en tire alors

$$AH = HG = GD = \frac{1}{3}AD$$

et

$$CI = IG = GF = \frac{1}{3}CF.$$

On a donc montré, tel que demandé, que *DG* vaut le tiers de *AD* et que *FG* vaut le tiers de *CF*.

c) Reprenant la démarche à partir des médianes *AD* et *BE*, qui s'intersectent en un point que nous appelons *G'* pour le moment, on peut montrer de la même manière que ce point est tel que *DG'* vaut le tiers de *AD* et *EG'*, le tiers de *BE*.
On en conclut donc que les points *G* et *G'* coïncident (car $DG = DG'$), de sorte que les trois médianes sont concourantes et que leur point commun coupe chacune d'elles au tiers de sa longueur (à partir du côté opposé au sommet d'où est issue la médiane).

Note 1 : Cet exercice a permis de montrer, par des arguments géométriques élémentaires, que les trois médianes d'un triangle quelconque sont concourantes et qu'elles se coupent en leur tiers. Mais pour compléter l'argument d'Archimède, et en particulier établir que l'aire du triangle *ACF* est le triple de celle du triangle *ABC* (cf. l'égalité

$$\frac{\text{Triangle } ACF}{\text{Parabole } ABC} = \frac{3}{1}$$

introduite à la p. 21), il faut faire intervenir le *centre de gravité* du triangle *ACF* et montrer où il se situe au juste. Or il s'avère que *le centre de gravité d'un triangle est précisément situé au point de rencontre de ses trois médianes*. C'est là un résultat bien sûr connu d'Archimède et dont la démonstration requiert certains principes de physique. On trouvera des commentaires à ce sujet aux pp. 190-200 du livre de Netz et Noel, *Le codex d'Archimède*, cité dans la section *Pour en savoir plus!*
Revenons à la discussion de l'article (pp. 20-21). Après avoir établi que pour un segment *MO* quelconque, on a la relation

$$\frac{MO}{O'P'} = \frac{C'K}{KN},$$

on imagine d'une part la région parabolique être concentrée au point *C'*, et d'autre part le triangle *ACF* être concentré en son centre de gravité *W* (voir la figure au bas de la p. 20). Or on vient d'accepter (en vertu de principes physiques) que *W* est le point situé à l'intersection des trois médianes. En particulier, *W* se trouve donc sur la médiane *CK*.

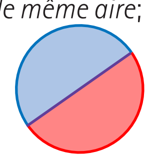
De plus, en raison du résultat de la question 3, $CK = 3 \times KW$. On obtient alors le rapport de masses (et donc d'aires)

$$\frac{\text{Triangle } ACF}{\text{Parabole } ABC} = \frac{C'K}{KW} = \frac{CK}{KW} = \frac{3}{1},$$

tel que mentionné à la p. 21. On a ainsi établi que le segment de parabole a une aire qui est le tiers de l'aire du triangle *ACF*. Ce dernier triangle étant quatre fois plus grand que le triangle *ABC*, le résultat d'Archimède suit alors.

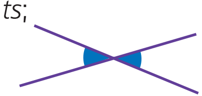
Note 2 : On a utilisé, à la solution de la question 3-a, l'expression *théorème de Thalès*. Il faut comprendre qu'il n'y a pas unanimité universelle quant à ce qui se cache derrière cette expression. Notons tout d'abord que la tradition attribue à Thalès — sans doute avec une certaine exagération — plusieurs résultats de géométrie élémentaire, dont les suivants :

- *tout diamètre d'un cercle coupe celui-ci en deux parties de même aire*;

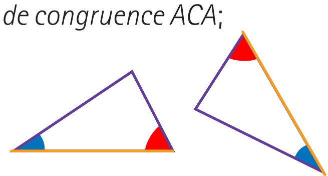


- *les deux angles à la base d'un triangle isocèle sont congruents*;

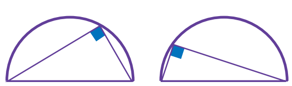
- *deux angles opposés par le sommet sont congruents*;



- *le cas de congruence ACA*;

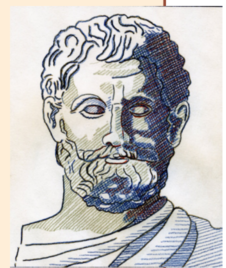


- *un angle inscrit dans un demi-cercle est droit.*



(Ces cinq résultats se retrouvent tous dans les *Éléments* d'Euclide: dans l'ordre, définition I.17, propositions I.5, I.15, I.26 et III.31. Quant au « théorème de Thalès » et à sa réciproque, dont il est question ci-après, il s'agit de la proposition VI.2.)

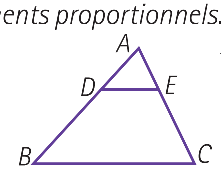
Thalès de Milet (env. ~624 – ~547)



Thalès se présente comme le mathématicien le plus ancien dont le nom est connu. Mais nous n'avons aucun écrit de lui qui nous soit parvenu. Son nom est resté rattaché au contexte des triangles semblables en raison d'un commentaire de Plutarque (env. 46 - 125) quant à la manière dont Thalès aurait déterminé la hauteur d'une pyramide en Égypte.

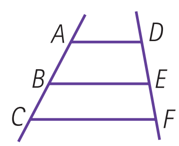
Dans la littérature mathématique de langue anglaise ou allemande, l'expression *théorème de Thalès* désigne le résultat sur l'angle inscrit dans un demi-cercle mentionné ci-haut. Mais dans la littérature mathématique francophone, il s'agit plutôt du résultat suivant, en rappel sans doute de la technique mise en oeuvre dans l'épisode de la pyramide :

- *toute droite parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels.*



Si $DE \parallel BC$, alors $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$.

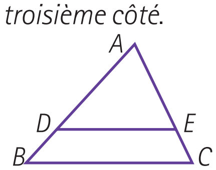
Il s'agit là en fait du cas particulier d'un énoncé, aussi appelé *théorème de Thalès*, où il est question des proportions déterminées par trois droites parallèles coupées par deux sécantes.



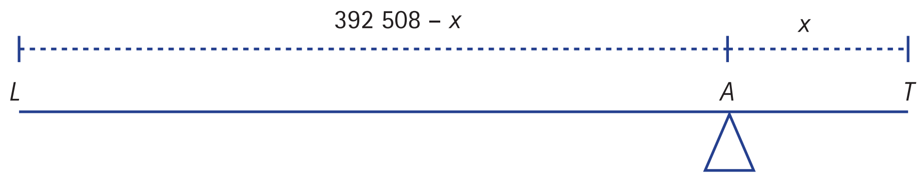
Si $AD \parallel BE \parallel CF$, alors $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

Le résultat utilisé en 3-a est la réciproque de l'énoncé précédent (à propos de la configuration où intervient un triangle) :

- *toute droite qui partage deux côtés d'un triangle en segments proportionnels est parallèle au troisième côté.*



Si $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$, alors $DE \parallel BC$.



4. Dans ce qui suit, nous appelons
   - L le point du levier où est posée la Lune,
   - T le point du levier où est posée la Terre,
   - A le point du levier où celui-ci est posé sur l'appui.

   Imaginons donc la Terre et la Lune posées en équilibre sur un levier. La distance totale entre les deux points de contact, T et L, de ces corps célestes avec le levier est donnée par la distance Terre-Lune à laquelle on rajoute les deux rayons, donc 392 508 km en tout.

   Appelons x la distance entre T et A. La distance de L à A est donc 392 508 – x km.

   Le principe du levier stipule que
$$\frac{\text{Masse}_{\text{Lune}}}{\text{Masse}_{\text{Terre}}} = \frac{\text{Distance}_{\text{Terre}}}{\text{Distance}_{\text{Lune}}},$$
   où $\text{Distance}_{\text{Terre}}$ et $\text{Distance}_{\text{Lune}}$ sont les distances entre le point d'appui A du levier et respectivement les points de contact T et L des astres avec le levier. Par conséquent,
$$\frac{7{,}3477 \times 10^{22}}{5{,}9722 \times 10^{24}} = \frac{x}{392\,508 - x}.$$
   Comme le membre de gauche de cette égalité est environ 0,0123, on obtient
$$4\,827{,}8484 = 1{,}0123x,$$
   d'où $x = 4\,769{,}1874$.

   Ainsi, la Lune fait équilibre à la Terre sur un levier dont le point d'appui est à (environ) 4 769 km du point où le levier est en contact avec la Terre. Lorsque le point d'appui est plus près de la Terre (c'est-à-dire x inférieur à 4 769), alors le système sera en déséquilibre et la Lune fera basculer la Terre.

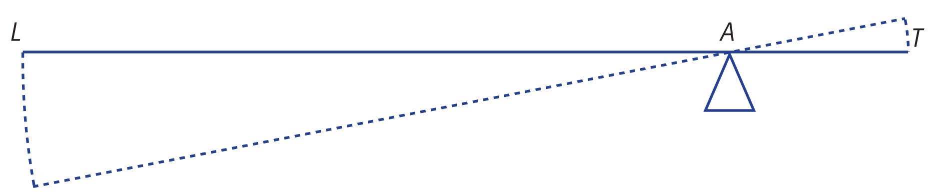
   (À noter que le rayon de la Terre étant de plus de 6000 km, le point d'appui du système en équilibre est donc « sous la Terre », en quelque sorte.)

Note 3 : Supposons que le point d'appui A du levier Terre-Lune soit maintenant déplacé de manière telle que la masse de la Lune puisse permettre de soulever la Terre. Il est clair alors que, dans ce mouvement de soulèvement de la Terre, les points de contact T et L des astres avec le levier se déplacent le long de deux cercles concentriques, centrés en A et dont les rayons respectifs sont les distances des points T et A d'une part, et L et A d'autre part.

Et convenons, pour fixer les idées, que le point d'appui A du levier se situe à 1950 km du point de contact T entre le levier et la Terre. Nous sommes alors en présence de deux cercles concentriques de rayons respectifs 1 950 et 390 558.

Supposons par ailleurs que l'on souhaite que la Terre soit soulevée de 1 m (le long de l'arc formé sur le cercle de rayon 1950 km). On peut alors se demander quelle est la longueur du trajet que fera au même moment la Lune (le long de l'arc de cercle de rayon 390 558 km).

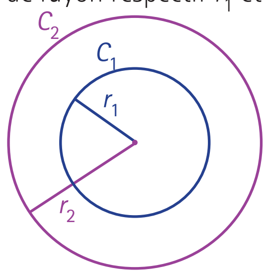
Comme la réponse à cette question est fournie dans le texte qui suit, essayez maintenant de résoudre ce problème par vous-même.



Arcs de cercle

Observons les deux arcs de cercle décrits respectivement par la Terre et la Lune, tandis que la Lune soulève la Terre. On voit que ces deux arcs correspondent au même angle au centre (sur les deux cercles concentriques en cause). Il s'ensuit alors que les longueurs des arcs sont proportionnelles aux rayons de ces cercles.

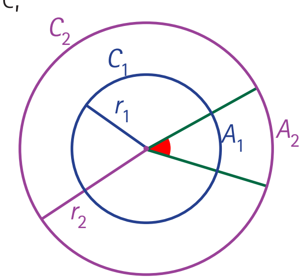
En effet, étant donné deux cercles concentriques de rayon respectif r_1 et r_2,



leurs circonférences $C_1 = 2\pi r_1$ et $C_2 = 2\pi r_2$ sont manifestement telles que

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Et si A_1 et A_2 sont des arcs sur l'un et l'autre cercle déterminés par un même angle au centre,



on a alors que ces arcs représentent la même « portion » de chaque cercle, de sorte que

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

tel qu'annoncé. (De manière plus directe, la proportionnalité des longueurs d'arc avec les rayons peut aussi être vue comme découlant immédiatement du fait que si l'angle au centre vaut θ radians, on a alors $A_1 = r_1\theta$ et $A_2 = r_2\theta$.)

Appelant y la longueur de l'arc de cercle décrit par la Lune tandis que la Terre est déplacée de 1 m, on en conclut finalement que

$$\frac{1}{y} = \frac{1\,950}{390\,558},$$

d'où il suit que y vaut un peu plus de 200 m.

Note 4 : Essayons maintenant de mener ce problème à sa finalité ultime : *et ce bon vieil Archimède dans tout ça?* Quid de la citation que la légende lui attribue — voir l'article, p. 21?[1] Que se passerait-il si Archimède voulait « vraiment » soulever la Terre?

Il nous faut une mise en scène. Supposons donc, pour fixer les idées, le cadre suivant. Tout d'abord, on a besoin d'un point d'appui sur lequel le levier viendra s'accoter. Et pourquoi ne pas prendre tout simplement la Lune elle-même? Puis, supposant la Lune et la Terre fixes pour un moment, imaginons un levier sur lequel la Terre serait posée, appuyé sur la Lune, et au bout duquel serait perché Archimède.

La question-clé devient : à quelle distance du point d'appui Archimède devrait-il se trouver pour que, debout sur le levier, il parvienne à soulever la Terre?

Et tant qu'à y être, une autre question : supposons qu'Archimède veuille soulever la Terre d'un petit centimètre; quelle serait la lon-

1. *La citation en cause, comme le lecteur s'en doute peut-être, ne se retrouve dans aucun des écrits d'Archimède. Elle prend sa source dans un commentaire de Pappus d'Alexandrie (4e siècle de notre ère), qui lui même s'appuie sur une tradition remontant à des ouvrages... qui étaient déjà perdus de son temps. (Voir à ce sujet Paul Ver Eecke, « Notes sur une interprétation erronée d'une sentence d'Archimède. » L'antiquité classique, 24(1) (1955), pp. 132-133.)*

gueur de l'arc de cercle que décrirait alors Archimède, à son bout du levier, pour obtenir un tel résultat?
Appelons *d* la distance entre le point d'appui du levier et le point où Archimède se tiendrait. On supposera ici, pour les besoins du calcul, que la masse d'Archimède est 78 kg. Le même raisonnement que celui mis en œuvre dans l'exercice mène à l'égalité de rapports

$$\frac{78}{5{,}9722 \times 10^{24}} = \frac{392\,508}{d}.$$

On en tire que la distance *d* vaudrait environ 3×10^{28} km — ce qui n'est pas peu, c'est le moins qu'on puisse dire...
On observera en effet à cet égard qu'une *année-lumière* vaut environ 9 461 milliards de kilomètres, c'est-à-dire $9{,}461 \times 10^{12}$ km. L'éloignement d'Archimède, tout au bout de son levier, serait donc de l'ordre de 3×10^{15} années-lumière à partir du point d'appui offert par la Lune. Or il n'est certes pas sans intérêt de rappeler que selon les données actuelles, on estime le diamètre de l'« Univers observable » à environ 100 milliards d'années-lumière, soit un « maigre » 10^{11} années-lumière. Ce bon Archimède se retrouverait donc à une distance de la Lune de l'ordre de 30 000 fois le diamètre de l'Univers. Ouf!
Quant à la longueur de l'arc que devrait décrire Archimède pour que sa propre masse permette de soulever la Terre d'un tout petit centimètre, il serait de l'ordre de 10^{21} m (voir les commentaires de la Note 3), donc moult années-lumière... Ouf (bis)!
Nous invitons le lecteur à contempler le temps qu'il faudrait alors à Archimède pour accomplir cet exploit (soulever la Terre d'un centimètre...) si, par exemple, le point du levier sur lequel se tiendrait notre grand Syracusain pivotait au rythme de 1 m par seconde. Il ne faut évidemment pas être pressé... On remarquera d'ailleurs à cet égard que selon les dernières données cosmologiques, on évalue l'âge de l'Univers à environ 13,8 milliards d'années, ou si on préfère $4{,}35 \times 10^{17}$ secondes. Bonne chance, Archimède!