

Bien ranger son argent

*Julie et Jacques,
chaque jour, gagnent
deux pièces d'or
et en dépensent une.
Mais, à la fin des temps,
Julie sera infiniment riche
et Jacques
complètement ruiné.*



Julie procède de la façon suivante pour gérer son argent :

Le jour numéro n , elle gagne deux pièces que nous noterons P_n et Q_n . Elle place P_n dans son grenier sous la pile des pièces qu'elle a déjà économisées et prend Q_n qu'elle dépense.

Le premier jour, la pile de pièces de son grenier est $[P_1]$, le second jour $[P_1, P_2]$, le troisième $[P_1, P_2, P_3]$ (le dessous de la pile est à droite).

Jacques lui, craignant l'usure du temps, préfère faire circuler ses pièces et trouve plus malin de procéder ainsi :

Chaque jour, il place sous la pile des pièces de son grenier les deux pièces P_n et Q_n qu'il vient de gagner. Il prend alors la pièce qui se trouve au-dessus de la pile et la dépense.

Le premier jour, sa pile est donc $[Q_1]$ (il a placé P_1 et Q_1 dans sa pile de pièces et s'est servi). Le second jour, sa pile est devenue $[P_2, Q_2]$ (il a ajouté les deux nouvelles pièces P_2 et Q_2 sous la pile c'est-à-dire à droite, ce qui lui a donné $[Q_1, P_2, Q_2]$ et s'est servi au-dessus). Le troisième jour, sa pile est devenue $[Q_2, P_3, Q_3]$, le quatrième $[P_3, Q_3, P_4, Q_4]$, et le cinquième $[Q_3, P_4, Q_4, P_5, Q_5]$, etc.

À la fin des temps, bien qu'ayant gagné et dépensé la même chose chaque jour, Julie sera infiniment riche et Jacques sera totalement ruiné.

En effet, Julie, à la fin des temps, disposera dans son grenier des pièces Q_1, Q_2, Q_3, \dots soigneusement économisées chaque jour.

Jacques, de son côté, n'aura rien car chaque pièce qu'il aura placée dans sa pile aura été dépensée. On peut même préciser :

la pièce P_n placée dans la pile le jour numéro n aura été dépensée le jour $2n-1$, et la pièce Q_n , elle aussi placée dans la pile le jour numéro n , aura été dépensée le lendemain, soit le jour $2n$. Chaque pièce finit par être dépensée, donc au final il ne reste rien à Jacques.

N'est-ce pas absurde (et injuste) que, gagnant et dépensant la même chose, Julie soit devenue infiniment riche et Jacques totalement ruiné !

Qu'en pensez-vous?