Extraction d'une racine dans un carré

Extraire une racine carrée, c'est évidemment faire de l'arithmétique. D'ailleurs, Descartes (1596–1650) en parlait comme de la cinquième opération arithmétique. Mais l'extraction de racine carrée, tout arithmétique qu'elle soit, peut aussi se voir sous un jour géométrique à la fois simple et parlant.

Bernard R. Hodgson
Université Laval

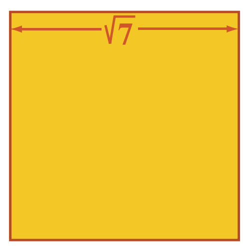
Une méthode connue mille ans avant Pythagore!

De tout temps, on a eu besoin d'extraire des racines carrées. Un tel problème, il va presque de soi, est géométrique dans sa nature même : extraire une racine carrée revient tout bonnement, comme cette appellation le suggère d'ailleurs, à trouver le côté d'un carré d'aire donnée. Mais les méthodes développées au fil des âges pour calculer des racines carrées ont souvent eu pour effet d'insister sur les manipulations arithmétiques, camouflant ainsi les aspects géométriques. Et pourtant il y a beaucoup à retirer de la recherche d'une racine carrée… « dans un carré »!

Prenons le cas des Mésopotamiens de l'Antiquité. Ils utilisaient diverses techniques pour calculer des racines carrées. Par exemple, ils avaient à leur disposition de nombreuses tablettes d'argile répertoriant des nombres élevés au carré, ainsi que des tablettes de racines carrées : en parcourant de telles tablettes, ils pouvaient se faire une bonne idée de la valeur de diverses racines carrées.

Mais l'une des méthodes d'extraction de racine carrée vraisemblablement utilisée par les Mésopotamiens était de nature géométrique. Même si elle n'a pu être observée comme telle dans des documents datant de cette époque, l'approche suivante est, aux dires des experts, tout à fait dans l'esprit des mathématiques mésopotamiennes.

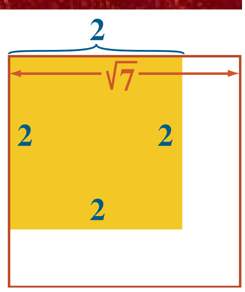
Supposons, pour illustrer la démarche, que l'on veuille calculer $\sqrt{7}$.



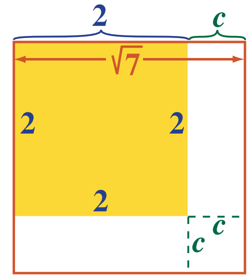
Géométriquement parlant, cette extraction de racine revient à rechercher le côté d'un carré d'aire 7.

On peut procéder en traçant d'abord dans ce carré un « grand » carré de côté connu. (La recherche d'une longueur convenable pour le côté d'un tel carré est en l'occurrence bien sûr banale, mais dans le cas d'un « gros »

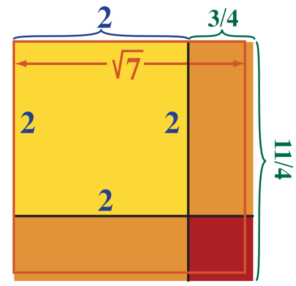
nombre tel $\sqrt{777777}$, on pourrait, comme les Mésopotamiens, utiliser une table de nombres élevés au carré.) Ici, comme $2^2 < 7$ et $3^2 > 7$, on peut prendre 2 comme longueur du côté du carré inclus dans celui de départ. On obtient ainsi un carré de côté 2 (et donc d'aire 4) contenu dans le carré d'aire 7. Mais 2 constitue une approximation plutôt grossière de $\sqrt{7}$. Comment faire pour améliorer la situation?



Regardons la région en forme de « L » inversé (vers la gauche) entourant le carré de côté 2. Appelant c la largeur d'une patte de ce « L » (c'est-à-dire en posant $c = \sqrt{7} - 2$), on remarque que cette région peut être partagée en trois morceaux : deux rectangles de côtés 2 et c, plus un petit carré de côté c. On a donc : $2(2c) + c^2 = 7 - 4 = 3$.



Afin de simplifier la discussion, on peut « oublier » le carré de côté c — après tout ce carré semble « petit » lorsqu'on le compare aux autres morceaux formant le carré d'aire 7. On obtient ainsi l'approximation : $2(2c) \approx 3$, c'est-à-dire $c \approx 3/4$. Une meilleure valeur approchée de $\sqrt{7}$ est donc donnée par : $2 + 3/4 = 11/4$.



Peut-être l'approximation $\sqrt{7} \approx 11/4$ suffit-elle quant à la précision désirée. Mais si tel n'est pas le cas, on peut poursuivre le calcul, à partir cette fois de la valeur que nous venons tout juste d'obtenir — qui est certes plus près de $\sqrt{7}$ que la valeur initiale 2. Cependant,

$$\left(\frac{11}{4}\right)^2 = 7\frac{9}{16},$$

de sorte que le carré de côté 11/4 ne peut pas être inclus dans le carré d'aire 7. Il faut donc adapter le raisonnement précédent.

Pour trouver une meilleure estimation, il faut soustraire de 11/4 le côté d de la nouvelle région en « L » inversé. Or, comme on le voit sur la figure ci-contre,

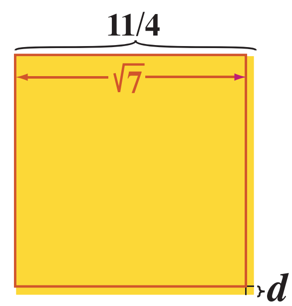
$$\left(\frac{11}{4}\right)^2 = 7 + 2\left(\frac{11}{4}\right)d - d^2$$

(en prenant les deux rectangles de côtés 11/4 et d, on se trouve à compter deux fois le carré de côté d). Négligeant d^2, on obtient :

$$\frac{11}{2}d \approx \frac{121}{16} - 7.$$

On trouve alors $d \approx 9/88$ et la nouvelle estimation de $\sqrt{7}$ est :

$$\frac{11}{4} - \frac{9}{88} = \frac{233}{88}.$$

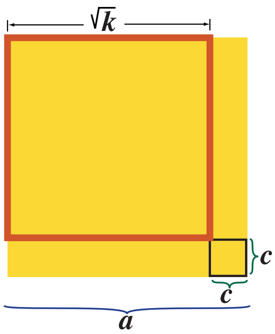


Vous voulez une meilleure précision? Il s'agit d'appliquer encore une fois la méthode, mais cette fois à partir de 233/88 comme longueur du côté. Vous trouverez ainsi comme nouvelle valeur approximative :

$$\frac{108497}{41008}.$$

À noter que les approximations successives 11/4, 233/88 et 108497/41008 ont respectivement comme valeurs 2,75, 2,647727..., 2,645752..., qui se rapprochent joliment vite de $\sqrt{7}$=2,645751...!

Et pour $\sqrt{k}$?



Reprenons le raisonnement dans le cas général du calcul de $\sqrt{k}$. Nous nous plaçons dans le cas où nous partons d'une approximation *par excès*, c'est-à-dire $a > \sqrt{k}$, et posons $c = a - \sqrt{k}$.

Le carré de côté a peut donc être vu comme contenant le carré d'aire k. Encore une fois, la région en forme de « L » inversé ainsi déterminée se partage en deux rectangles a par c et un petit carré de côté c. Négligeant ce petit carré, on obtient l'approximation $2ac \approx a^2 - k$, c'est-à-dire :

$$c \approx \frac{a^2-k}{2a}.$$

Une meilleure valeur de $\sqrt{k}$ (par rapport à la valeur de départ a) est alors obtenue en prenant pour approximation de $a - c$ la quantité $$a-\frac{a^2-k}{2a}=\frac{a^2+k}{2a}.$$

Ainsi, revenant à l'approximation de $\sqrt{7}$ à partir de 11/4, on retrouve comme nouvelle valeur : $$\frac{\left(\frac{11}{4}\right)^2+7}{2\left(\frac{11}{4}\right)}=\frac{233}{88}.$$

L'expression $\frac{a^2+k}{2a}$ que nous venons d'obtenir gagnerait sans doute à être simplifiée — notons cependant que de telles manipulations algébriques n'appartiennent évidemment pas au savoir mésopotamien, puisqu'elles n'ont été introduites que plus de deux millénaires ultérieurement! Cette « formule mésopotamienne » se transforme ainsi aisément en : $\frac{1}{2}\left(a+\frac{k}{a}\right)$.

La méthode géométrique précédente pour l'extraction de $\sqrt{k}$ revient donc, arithmétiquement parlant, au calcul de la moyenne des deux nombres a et k/a. Cela ne vous rappelle-t-il pas quelque chose?[1]

Des approximants pris en sandwich

Allons-y d'une petite mise au point quant à la façon dont s'alignent à la queue leu leu les approximants obtenus par la méthode mésopotamienne.

Supposons donc que dans le calcul de la racine carrée de k, nous obtenons des approximations successives a, a', a'', etc. La valeur a étant choisie arbitrairement, on a alors, comme précédemment,

$$a'=\frac{1}{2}\left(a+\frac{k}{a}\right),\ a''=\frac{1}{2}\left(a'+\frac{k}{a'}\right),\text{ etc.}$$

Notons tout d'abord qu'à l'exception peut-être de a, toutes les approximations sont forcément supérieures à $\sqrt{k}$. On peut vérifier ce fait en revenant à la « formule mésopotamienne ». Par exemple, dans le cas de l'approximation a', on a :

$$a'=\frac{a^2+k}{2a}.$$

Considérant la différence $a'^2 - k$, on trouve :

$$a'^2-k=\frac{a^4+2a^2k+k^2-4a^2k}{4a^2}=\frac{(a^2-k)^2}{4a^2}.$$

Cela montre bien que $a' > \sqrt{k}$; en effet $a'^2 - k$ est positif, puisque le numérateur et le dénominateur de la dernière fraction sont tous deux positifs — ce sont deux carrés!

Observons qu'on a alors $k/a' < \sqrt{k}$, puisque le produit de k/a' et de a' est k – lorsqu'un

[1] *Voir le texte de Frédéric Gourdeau figurant aux pages 12 à 15 de ce numéro d'Accromath.*

nombre s'écrit sous forme de deux facteurs distincts, ceux-ci sont de part et d'autre de sa racine carrée. Mais alors a'' est forcément situé entre k/a' et a', puisqu'il s'agit de la moyenne arithmétique de ces deux nombres. Et comme a', l'approximant a'' est supérieur à $\sqrt{k}$.

Les approximations successives résultant d'un a quelconque (plus petit ou plus grand que $\sqrt{k}$) sont donc ordonnées comme suit :

$$a' > a'' > ... > \sqrt{k},$$

convergeant rapidement vers $\sqrt{k}$.

Pourquoi dit-on : « extraire une racine »?

L'expression « extraire la racine » provient d'une analogie avec la botanique. La racine d'une plante est la partie cachée qui pousse à l'inverse de la tige. Il faut creuser pour l'extraire. De même, la racine d'un nombre est une valeur cachée à laquelle on n'a pas accès directement. Pour extraire la racine d'un nombre, il faut se « creuser les méninges ».

La racine d'un nombre est désignée en représentant celui-ci sous un radical. Le nom radical vient du latin « radix » qui signifie racine.

On utilise aussi le mot racine pour représenter la solution d'une équation, cette solution étant également une valeur cachée qu'il faut trouver en résolvant l'équation.

Civilisation mésopotamienne

La civilisation mésopotamienne a fleuri à compter du 3e millénaire av. J.-C. dans la région correspondant à l'actuel Irak – une de ses villes importantes était Babylone, la Babel de la Bible. C'est à partir du 19e siècle, lorsqu'on a mis au jour de nombreuses tablettes jusque là égarées, qu'on a pu mieux connaître l'apport de cette civilisation aux mathématiques. Les Mésopotamiens utilisaient un système de numération de base soixante, ce qui se reflète encore aujourd'hui dans notre division des heures et des minutes. Ils possédaient des techniques de résolution d'équations quadratiques et une de leur tablette (connue sous le sympathique vocable « Plimpton 322 ») renferme une liste de nombres satisfaisant à la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$ ... plus d'un millénaire avant la naissance de Pythagore!

Les premières sociétés agraires ont vu le jour dans la région appelée « Croissant fertile ». Les populations pouvaient s'y nourrir sans avoir à se déplacer au gré des saisons. C'est une région où poussaient le blé et l'orge sauvages, grâce à des précipitations annuelles supérieures à 200 mm de pluie, et où il y avait beaucoup de moutons et de chèvres sauvages.

Pour gérer et répartir les biens, faire du commerce avec les voisins, compiler les observations et faire les prévisions en astronomie, il a fallu développer un système de numération assez évolué.

C'est donc aux abords du Croissant fertile que s'est développée la civilisation mésopotamienne, entre deux fleuves, le Tigre et l'Euphrate. Le mot Mésopotamie indique d'ailleurs cette situation géographique, car il dérive du grec « méso » qui signifie « au milieu » et « potamos », fleuve.

Certains racontent à cet égard que les poules de Mésopotamie éprouveraient des problèmes de ponte, puisqu'elles voient le tigre... et l'oeuf rate!

Tablette Cuneiform 322 communément appelée **Plimpton 322,** *don de George-Arthur Plimpton, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University*

Carte du Proche-Orient, *le Croissant fertile (noms modernes en italique)*