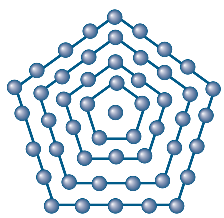
Section problèmes

Géométrie des nombres

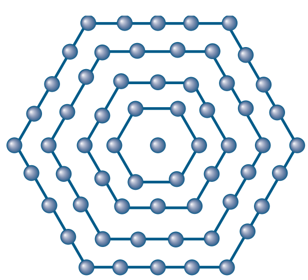
La construction même des nombres triangulaires T_n nous porte à croire que ces nombres relativement simples posséderont plusieurs propriétés intéressantes. Voici quelques-unes de ces propriétés, présentées en ordre de difficulté, mais à la portée de tous avec un peu de temps libre et de patience.

1. La somme de deux nombres triangulaires consécutifs est toujours un nombre carré,
$$T_{n-1} + T_n = n^2.$$
2. Tous les nombres triangulaires T_n apparaissent dans le Triangle de Pascal, et plus spécifiquement le long de deux diagonales.
3. Déterminer la formule de récurrence et la formule générale pour le n-ième nombre pentagonal centré. Montrer que la formule générale est un polynôme quadratique irréductible divisée par un nombre entier.



Nombres pentagonaux centrés

4. Déterminer la formule de récurrence et la formule générale pour le n-ième nombre hexagonal centré. Montrer que la formule générale est un polynôme quadratique irréductible divisée par un nombre entier.

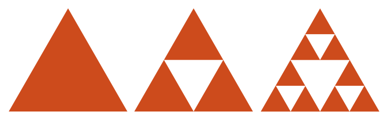


Nombres hexagonaux centrés

5. Montrer que tous les nombres octogonaux centrés sont des nombres carrés. (Les nombres octogonaux centrés sont les nombres polygonaux centrés à huit côtés.)
6. Montrer que tous les nombres nonagonaux centrés sont des nombres triangulaires. (Les nombres nonagonaux centrés sont les nombres polygonaux centrés à neuf côtés.)
7. Montrer que le carré du nombre triangulaire de rang n est égal à la somme des cubes des n premiers entiers.
$$T_n^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

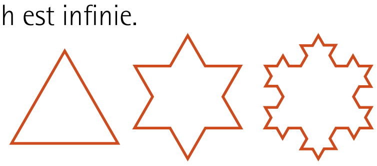
Dimension

1. Montrer que l'aire du tapis de Sierpinski est nulle.



Rappel. Le tapis de Sierpinski s'obtient par itération infinie: on commence avec un triangle et on enlève le triangle du milieu. Il reste trois triangles. Dans chacun on enlève le triangle du milieu, etc. Le tapis de Sierpinski est la limite de ce processus.

2. Montrer que la longueur du flocon de von Koch est infinie.



Rappel. Le flocon de von Koch s'obtient par itération. À chaque étape de l'itération on remplace un segment par un groupe de quatre segments, chacun de longueur égale au tiers de la longueur du segment initial. Le flocon de von Koch est la limite de ce processus.