Le maintien de la biodiversité des bancs marins est un enjeu de taille dans un contexte où la demande pour les produits de la mer est toujours en croissance et où la technologie permet de localiser et de capturer cette ressource relativement facilement. Un contrôle strict des quantités de poissons pêchés doit être exercé afin de maintenir l'équilibre fragile des écosystèmes.

Probabilités, statistiques et populat

Thierry Duchesne
Louis-Paul Rivest
Université Laval

Un principe utile pour la gestion des pêches est celui du rendement équilibré maximal (en anglais « maximum sustainable yield »). C'est la quantité maximale de poissons qui peut être pêchée dans une population sans mettre en péril sa survie. Déterminer ce rendement équilibré maximal permet d'atteindre l'objectif de pêcher le plus possible, sans toutefois tomber dans la surpêche qui entraînerait la disparition de la population de poissons. Mais, la distinction entre une pêche équilibrée qui maximise le rendement et une surpêche est souvent difficile à faire. Des modèles mathématiques et statistiques sont utiles pour établir cette frontière. Ils interviennent dans les calculs des quotas de pêche. L'objectif de cet article est de présenter un modèle simple qui a beaucoup été utilisé par les gestionnaires de la pêche.

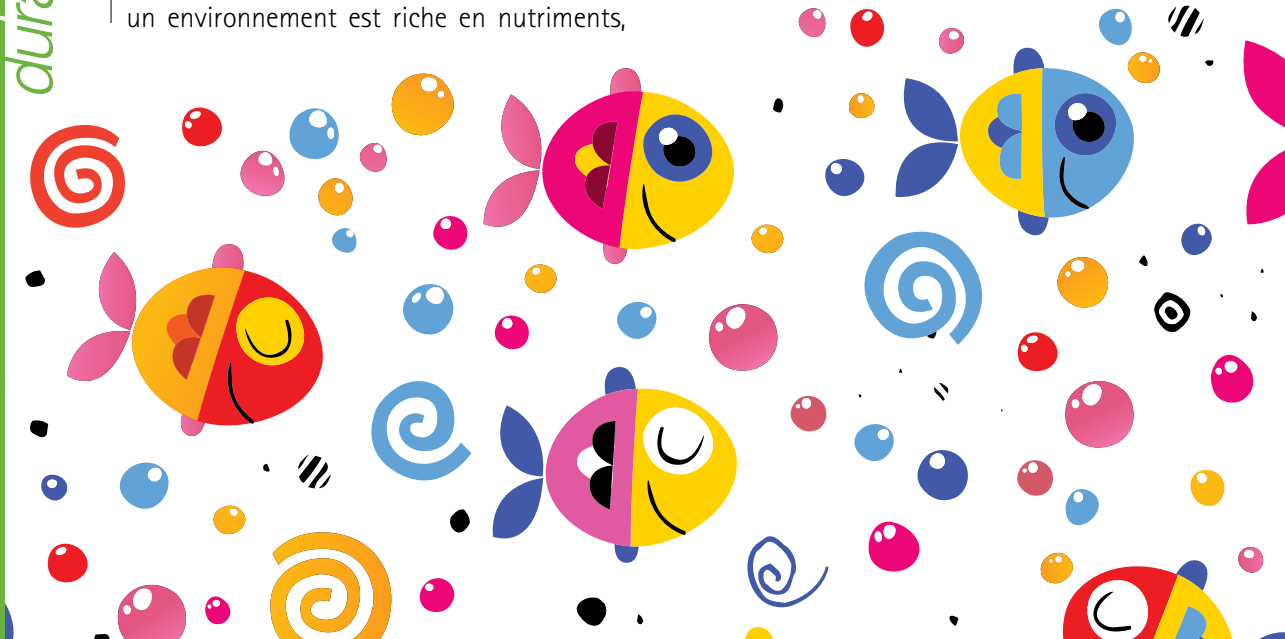
Modèle de Schaefer

Nous nous intéressons à la biomasse, exprimée en tonnes, de la population de poisson. Le modèle mis de l'avant par Schaefer en 1954 fait intervenir deux paramètres. Il y a d'abord M la biomasse maximale qui peut vivre en permanence sur un certain site ; plus un environnement est riche en nutriments, plus sa valeur de M est élevée. Le deuxième paramètre est r, le taux intrinsèque de croissance. Ce paramètre est associé au taux de reproduction des poissons de la population. Une grande valeur de r signifie que la population se reproduit bien et que les jeunes poissons survivent aux prédateurs. Le modèle donne la biomasse à l'année $n+1$, X_{n+1}, en fonction de X_n, la biomasse à l'année n. X_0 est la biomasse à l'année 0 ; on suppose souvent que la population n'était pas exploitée à ce moment et que $X_0 = M$, la biomasse maximale. Si la pêche annuelle s'élève à C tonnes, la biomasse à l'année $n+1$, X_{n+1}, connaissant la biomasse à l'année n, X_n s'écrit

$$X_{n+1} = X_n + r X_n \left(1 - \frac{X_n}{M}\right) - C,$$

dans la mesure où X_{n+1} est supérieure à 0. Pour bien comprendre ce modèle supposons d'abord que la population n'est pas exploitée, c'est-à-dire que $C = 0$. A l'année n la population s'accroît de

$$r X_n \left(1 - \frac{X_n}{M}\right).$$



ions de poissons

Ainsi en l'absence de pêche, si X_0 est plus petit que M, la population va croître tranquillement jusqu'à atteindre sa capacité limite M.

Si C est très grand, par exemple $C=M$, l'équation précédente donne $X_1 = 0$. Ceci signifie que la population est disparue à l'année 1 à cause de la surpêche. Le rendement équilibré maximal est la plus grande valeur de C qui n'entraîne pas sa disparition. Cette valeur, calculée dans l'encadré ci-contre, est

$$C = r\frac{M}{4}.$$

En conclusion, lorsque l'on applique le principe du rendement équilibré maximal selon le modèle de Schaefer les prises annuelles sont de $C=rM/4$. La taille de la population est alors de $x=M/2$. Pour vérifier ces résultats on pose $X_n = M/2$ et $C= rM/4$ dans l'équation pour le modèle de Schaefer. On obtient

$$X_{n+1} = X_n + rX_n\left(1-\frac{X_n}{M}\right) - C$$
$$= \frac{M}{2} + r\frac{M}{4} - r\frac{M}{4} = \frac{M}{2},$$

ainsi la taille de la population ne change pas d'une année à l'autre dans ces conditions.

Exemple : la population d'aiglefin du banc Georges

Des études scientifiques ont montré que le modèle de Schaefer, avec M = 129 000 t et r = 0,4, s'applique bien à la population d'aiglefin du banc Georges (voir l'encadré sur le stock d'aiglefin du banc Georges). La capture annuelle qui donne un rendement équilibré maximal est

$$C = 0{,}4 \times \frac{129\,000}{4} = 12\,900 \text{ t}.$$

Dérivation de la capture optimale pour le modèle de Schaefer

Si l'espèce ne disparaît pas, sa biomasse doit converger vers une certaine valeur x lorsque n devient de plus en plus grand. Cette valeur stationnaire de x est une solution de l'équation suivante

$$x = x + rx\left(1-\frac{x}{M}\right) - C.$$

En simplifiant, cette équation peut s'écrire comme

$$\frac{rx^2}{M} - rx + C = 0$$

C'est une équation du deuxième degré ; elle a une solution réelle si et seulement si le déterminant est positif ou nul. On a donc

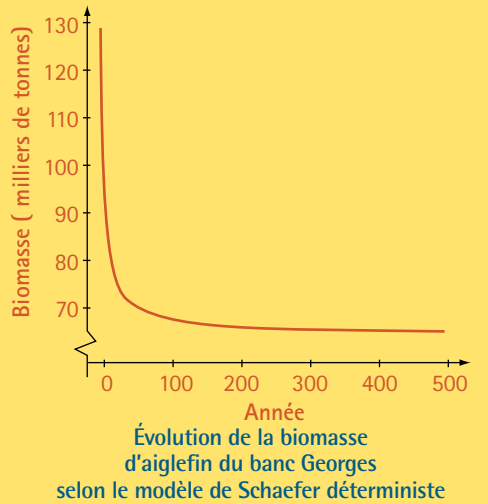
$$r^2 - 4\frac{rC}{M} \geq 0 \iff r\left(r - \frac{4C}{M}\right) \geq 0$$

$$\iff r - \frac{4C}{M} \geq 0 \iff C \leq \frac{rM}{4}$$

Ainsi, la plus grande valeur possible de C est $rM/4$. Lorsque l'on remplace C par $rM/4$ dans l'équation qui définit x, cette dernière devient :

$$\frac{rx^2}{M} - rx + \frac{rM}{4} = 0$$
$$\frac{r}{M}\left(x^2 - Mx + \frac{M^2}{4}\right) = 0$$
$$\frac{r}{M}\left(x - \frac{M}{2}\right)^2 = 0$$

et sa solution est $x = M/2$.



Évolution de la biomasse d'aiglefin du banc Georges selon le modèle de Schaefer déterministe

A chaque année on peut donc prélever jusqu'à 10 % de la population, selon le principe du rendement maximal. Cette pêche ne compromet pas la survie de la population; elle va se faire de sorte que la biomasse se stabilisera à

$$\frac{129\,000}{2} = 64\,500 \text{ t.}$$

Ce modèle est déterministe. Sachant qu'à l'année 0, X_0= 129 000 t et que la pêche annuelle prélève C= 12 900 t, on peut déterminer exactement la biomasse à chaque année. Le graphique à la page précédente montre l'évolution de cette biomasse, de l'année 0 où X_0 = 129 000 t, à l'année 500 où X_{500} = 65 000 t. Après 500 années la valeur limite de 64 500 t est presque atteinte.

Évidemment pour atteindre la limite de 64 500 t, la biomasse au temps 0, X_0, doit nécessairement être supérieure ou égale à sa valeur limite de 64 500 t. Si, par exemple, on a X_0 = 50 000 t alors

$$X_1 = 50\,000 + 0{,}4 \times 50\,000 \times \left(1 - \frac{50\,000}{129\,000}\right) + 12\,900$$

$$= 49\,348 \text{ t.}$$

De même X_2 = 48 636 t ; ainsi la suite des X_n est décroissante et tend vers 0 lorsque n croît. Dans ce cas, la biomasse initiale est insuffisante pour soutenir une pêche annuelle de 12 900 t ; ce niveau de pêche entraîne la disparition de la population.

Vers un modèle plus réaliste

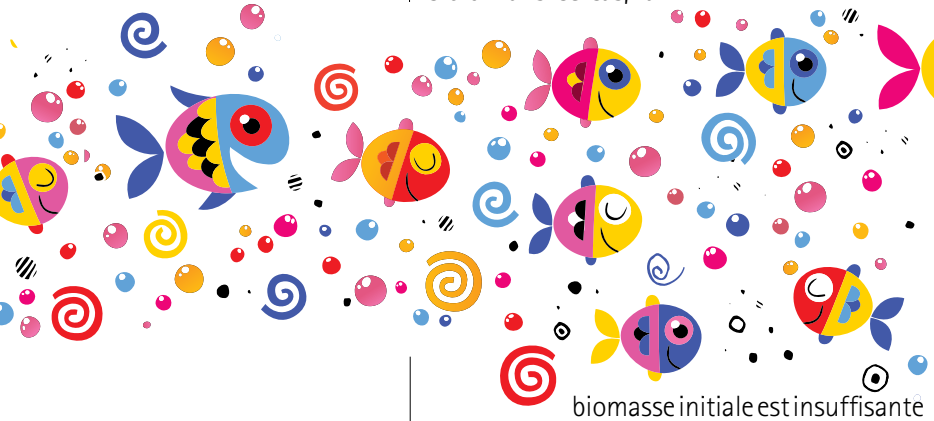
L'exemple précédent illustre que le rendement équilibré maximal calculé à partir du modèle de Schaefer est fragile. Si, à une année donnée, une mortalité imprévue fait baisser la biomasse sous la barre de $M/2$, une exploitation selon ce principe entraînera une disparition de la population. Il est donc utile de modifier le modèle de Schaefer pour y incorporer des fluctuations annuelles aléatoires et imprévisibles et de déterminer les prises optimales dans ces conditions. C'est ce qui est fait dans le prochain paragraphe.

En pratique la taille d'une population de poisson ne dépend pas seulement de la pêche. La disponibilité de nourriture ou la présence de prédateurs à une année donnée ont également une influence. Ces variables sont souvent difficiles à mesurer ; il n'est pas possible de les intégrer à un modèle déterministe. Pour en tenir compte on ajoute une composante aléatoire au modèle qui représente la variabilité environnementale. Appelons V_n la variabilité environnementale pour l'année n.

Un nouveau modèle de Schaefer avec variabilité environnementale s'écrit

$$X_{n+1} = \left[X_n + r X_n \left(\frac{1 - X_n}{M}\right) - C\right] V_n.$$

Si on pose V_n = 1 pour tout n, on retrouve le modèle déterministe de Schaefer. En général V_n est une « variable aléatoire » qui peut prendre plusieurs valeurs, avec des probabilités différentes. Ici on va considérer le cas simple où il y a trois valeurs possibles pour V_n, soit 0,5, 1 et 1,5. La valeur V_n = 0,5 correspond à une mauvaise année où la population perd 50 % de son effectif à cause de conditions environnementales difficiles. Par symétrie V_n =1,5 est associé à une bonne année où la population croît d'un 50 % additionnel. Finalement, V_n = 1 correspond à une année standard où le modèle déterministe s'applique. Nous associons aux valeurs 0,5, 1 et 1,5 des probabilités de 0,25, 0,5 et 0,25 respectivement.



Dans un modèle stochastique chaque année a sa propre valeur de V_n déterminée « au hasard » indépendamment des valeurs de V_n pour les autres années. La valeur de X_n dépend donc de X_0 et des variabilités environnementales pour les n premières années. En fait X_n est dans ce contexte une variable aléatoire qui peut prendre plusieurs valeurs avec différentes probabilités. Un tel modèle est appelé « stochastique », par opposition à déterministe.

Dans un modèle avec variabilité environnementale, une pêche annuelle égale au rendement équilibré maximal, $C = rM/4$, permet-elle de préserver l'espèce à long terme ?

La réponse est non. À long terme, on souhaiterait que la biomasse se rapproche de la valeur limite du modèle déterministe. Quelques années difficiles avec des V_n de 0,5 vont, à un moment donné, amener la valeur de X_n sous la barre des $M/2$ ce qui pourrait amorcer une lente et inexorable descente vers 0 telle qu'illustrée à la section précédente. En résumé

$$\text{si } X_0 = M \text{ et } C = r\frac{M}{4}$$

dans le modèle avec variabilité environnementale, on pourrait atteindre la valeur $X_n = 0$ après un certain nombre d'années.

Le problème avec des prises annuelles fixes est que des mauvaises conditions environnementales font parfois baisser la taille de la population ; une pêche déterminée par le rendement équilibré maximum du modèle déterministe ne permet pas à la population de se renouveler et entraîne sa disparition à brève échéance. Pour ce modèle, une pêche annuelle constante n'est pas souhaitable. Il faut donc établir les prises à l'aide d'un taux de pêche p ; la capture à l'année n est alors pX_n, une proportion fixe de la biomasse disponible. Dans ce cas le principe du rendement équilibré maximal cherche la valeur de p pour la quelle les prises pX_n sont « en moyenne » les plus grandes possibles. Nous étudions maintenant la détermination de cette valeur de p dans le cadre d'un modèle de Schaefer stochastique.

Modèle de Schaefer avec variabilité environnementale

On obtient ce nouveau modèle en remplaçant les captures C par des captures relatives pX_n dans le modèle précédent. On obtient

$$X_{n+1} = \left[X_n + r X_n \left(\frac{1 - X_n}{M} \right) - pX_n \right] V_n$$
$$= X_n \left[1 + r - p - r\frac{X_n}{M} \right] V_n.$$

Un taux de pêche p supérieur à r, le taux de reproduction intrinsèque de l'espèce, entraine l'extinction de la population. Il faut donc que $p < r$. Comment choisir p ? Un candidat possible est le taux de pêche correspondant à la quantité de poissons pêchés pour un

Variables aléatoires : espérance et variance

Dans un modèle mathématique, une variable aléatoire V est une quantité qui peut prendre plusieurs valeurs. On considère ici le cas où il y a 3 valeurs possibles, disons x_1, x_2 et x_3, avec probabilités p_1, p_2 et p_3 où $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On écrit $Pr(V = x_j) = p_j$ pour $j = 1, 2, 3$. L'espérance μ et la variance σ^2 de V sont des caractéristiques importantes qui déterminent les propriétés des modèles où figurent des variables aléatoires. Elles sont définies de la façon suivante,

$$\mu = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \text{ et}$$
$$\sigma^2 = p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + p_3(x_3 - \mu)^2.$$

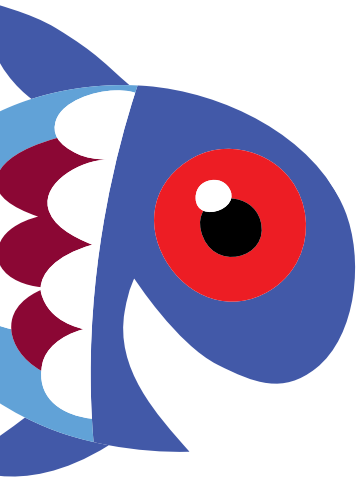
Dans le modèle stochastique suggéré pour le stock d'aiglefin, la variabilité environnementale V prend trois valeurs, 0,5, 1, et 1,5 avec des probabilités 1/4, 1/2 et 1/4. Écrire $Pr(V = 0{,}5) = 0{,}25$ veut dire que sur un grand nombre d'années les conditions environnementales seront défavorables dans environ 25 % des années, ou une année sur 4 en moyenne. L'espérance de V vaut

$$\mu = 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 1 + 0{,}25 \times 1{,}5 = 1;$$

ainsi, en moyenne, les années ne sont ni favorables ni défavorables. La variance de V se calcule à l'aide de la formule précédente:

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}(1-1)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

En général si la fraction a représente l'augmentation (ou la diminution) de la population à une bonne (ou mauvaise) année, la variance de V s'écrit $\sigma^2 = a^2/2$. Si on prend $a = 1/2$, on retrouve bien $\sigma^2 = 1/8$. Pour le modèle déterministe, $a = 0$ et $\sigma^2 = 0$. Ainsi, la variance σ^2 mesure l'ampleur des fluctuations de la taille de la population de poisson associées aux conditions environnementales.



rendement équilibré maximal sous le modèle déterministe. En effet, dans le modèle déterministe la biomasse limite de la population est $M/2$ et la pêche correspondante est

$$C = \frac{M}{2} \times \frac{r}{2},$$

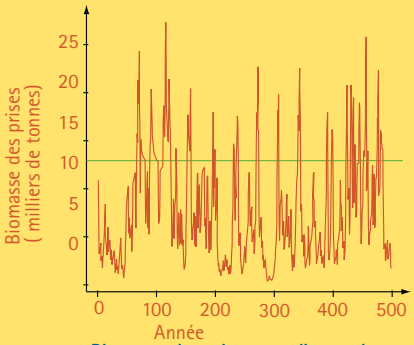
le taux de pêche est donc $p = r/2$. La détermination du p optimal pour un modèle stochastique est plus complexe. Un article récent de la littérature scientifique sur ce sujet en donne l'approximation suivante,

$$p_{opt} \approx \frac{r}{2} - \frac{2(2-r)}{(4-r)^2}\sigma^2,$$

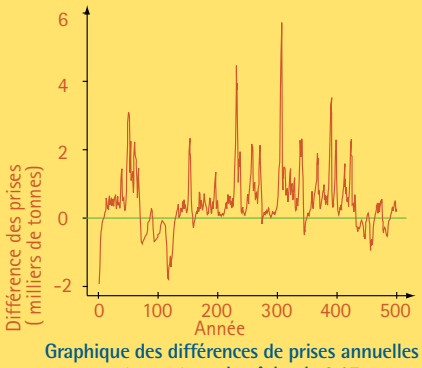
où σ^2 est la variance de la variabilité environnementale V (voir l'encadré sur les concepts d'espérance et de variance d'une variable aléatoire). Cette équation met en lumière le fait que le p_{opt} décroît lorsque la variance du bruit augmente. Autrement dit, plus l'écosystème est instable, plus ses populations doivent être exploitées avec prudence.

Dans l'exemple de l'aiglefin du banc Georges, on a $r = 0{,}4$. Avec un σ^2 de 1/8, le taux optimal selon l'équation précédente serait

$$p_{opt} \approx 0{,}2 - \frac{2(1{,}6)}{(3{,}6)^2} \times \frac{1}{8} = 0{,}17.$$



Biomasse des prises pour l'exemple de l'aiglefin du banc Georges avec un taux de pêche optimal



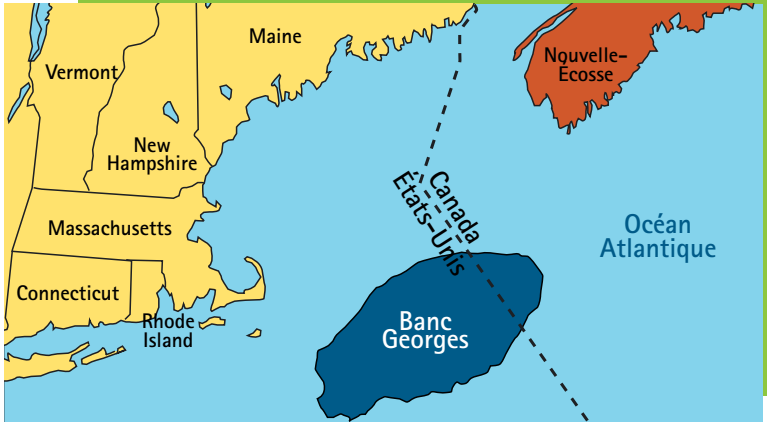
Graphique des différences de prises annuelles entre un taux de pêche de 0,17 et un taux de pêche de 0,20.

Le stock d'aiglefin du banc Georges

Le banc Georges est une large élévation sablonneuse du fond marin de forme ovale d'environ 120×240 km² située à la limite des plateformes continentales de l'Atlantique et de l'Amérique du Nord. Comme le montre le plan ci-dessous il se situe à l'est du Cap Cod et au sud de la Nouvelle-Écosse. Il est traversé par le courant froid du Labrador qui lui garantit un apport continu en nutriments. Une faible profondeur et la proximité du système de marrées « baie de Fundy-golfe du Maine » en font un site idéal pour la croissance de stocks de poissons.

On y retrouve plusieurs espèces commerciales comme l'aiglefin (*Melanogrammus aeglefinus)*. Il est estimé que lorsque la pêche y est bien gérée, le banc Georges peut soutenir des prises annuelles de près de 420 000 tonnes.

L'aiglefin est un poisson de fond que l'on retrouve sur le banc Georges. Les valeurs M = 129 000 t et r = 0,4 s'appliquent à cette espèce pour la période de 1976 à 1993 durant laquelle ce stock était en reconstruction après avoir subi une importante surpêche dans les années 60. Durant ces années, plusieurs flottes de bateaux de pêches provenant d'aussi loin que l'Europe de l'Est s'étaient jointes aux flottes canadiennes et américaines qui exploitaient les poissons du banc Georges. En octobre 1984, une décision de la cour internationale de La Haye reconnaît la juridiction du Canada et des États-Unis sur le banc Georges. Une gestion très rigoureuse est mise en place. Cette dernière se fait sentir une dizaine d'années plus tard alors que certains stocks de poissons qui avaient pratiquement disparu lors de la surpêche des années 60 reprennent de l'importance.



Milner Baily Schaefer 1912-1970

Milner Baily Schaefer est né à Cheyenne, au Wyoming. Il a étudié à l'Université de Washington où il a obtenu un baccalauréat en sciences en 1935.

Dès l'obtention de son baccalauréat, il a travaillé au département des pêches de l'état de Washington à Seattle. De 1937 à 1942, il a travaillé à la Commission des pêches du saumon du Pacifique à Westminster, Colombie-Britannique. Il a servi dans la marine durant la guerre et par la suite, il a occupé divers postes en tant que biologiste spécialiste des pêches. Après avoir terminé son doctorat à l'Université de Washington, en 1950, Schaefer est devenu directeur des enquêtes de l'IATTC, (Inter-American Tropical Tuna Commission), une commission internationale des pêches. Pendant les dix années qui ont suivi, il a travaillé sur la théorie de la dynamique de la pêche et mis au point un modèle de population des espèces marines qui est connu sous le nom *modèle de Schaefer*.

Au cours des années 1950, Schaefer est devenu de plus en plus impliqué dans plusieurs comités, groupes et organisations concernés par les ressources marines, en particulier la pêche et tous les aspects de l'océanographie. Durant cette période, il a donné des cours sur la dynamique et l'exploitation des populations de poissons.

En 1962, il démissionna de son poste de directeur des enquêtes à la IATTC pour occuper le poste de directeur de l'Institut des Ressources Marines de l'Université de Californie tout en agissant comme conseiller scientifique pour l'IATTC. Jusqu'à sa mort en 1970, Schaefer a beaucoup voyagé à travers le monde pour donner des conférences et assister à des colloques sur les pêches et l'océanographie.

Ce résultat théorique dit qu'en ayant un taux de pêche un peu plus faible que $p = 0{,}2$, on maximise, en moyenne, les prises. Pour vérifier ce résultat on va simuler, à l'aide de l'ordinateur, 500 valeurs de la variabilité environnementale V_n ce qui va nous permettre de créer deux réalisations du X_n pour le modèle de Schaefer avec variabilité environnementale, l'une avec un taux de pêche de $p_{opt} = 0{,}17$ et l'autre avec $p = 0{,}2$.

Le graphique de gauche montre les captures annuelles $0{,}17 \times X_n$ pour le modèle avec un taux de pêche optimal de $p_{opt} = 0{,}17$ alors que le graphique de droite montre la différence entre les captures selon le taux de pêche optimal $p_{opt} = 0{,}17$ et celles avec $p = 0{,}2$. Le graphique de gauche révèle que les prises sont très variables. Elles sont parfois supérieures aux prises de $C = 12\,900$ t du modèle déterministe. En général même si $p_{opt} = 0{,}17$ est inférieur à 0,2, il donne quand même des prises supérieures à celles obtenues avec le taux de pêche du modèle déterministe.

Conclusion

Les quotas de pêche ont longtemps été déterminés à l'aide du rendement équilibré maximal selon le modèle de Schaefer déterministe. Très tôt le modèle a cependant été critiqué par de nombreux biologistes. Sa grande simplicité ne permettait pas de prendre en compte des éléments importants pour la dynamique d'un stock de poissons tels que les relations inter-espèces et la structure d'âges de la population. La surexploitation associée au rendement équilibré maximal en présence de variabilité environnementale, telle qu'illustrée dans cet article, a été mise en lumière dans les années 1980. Malgré tout, sa grande simplicité fait en sorte que cette mesure est encore utilisée aujourd'hui dans la gestion des pêches. Pour éviter la surexploitation, on fixe souvent la capture annuelle C à une fraction, disons 70 % ou 80 %, de $rM/4$.