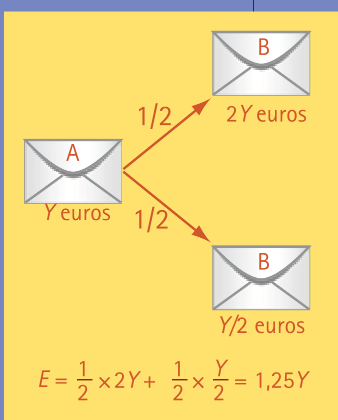
Les deux enveloppes d'Amandine

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Amandine me montre deux enveloppes fermées identiques A et B. Elle me dit que l'une contient une certaine somme en euros et que l'autre contient le double de cette somme. Elle ne me dit pas quelle est celle des deux enveloppes qui contient le plus. Comme c'est mon anniversaire, elle m'offre de choisir une des enveloppes et me dit que son contenu sera pour moi.



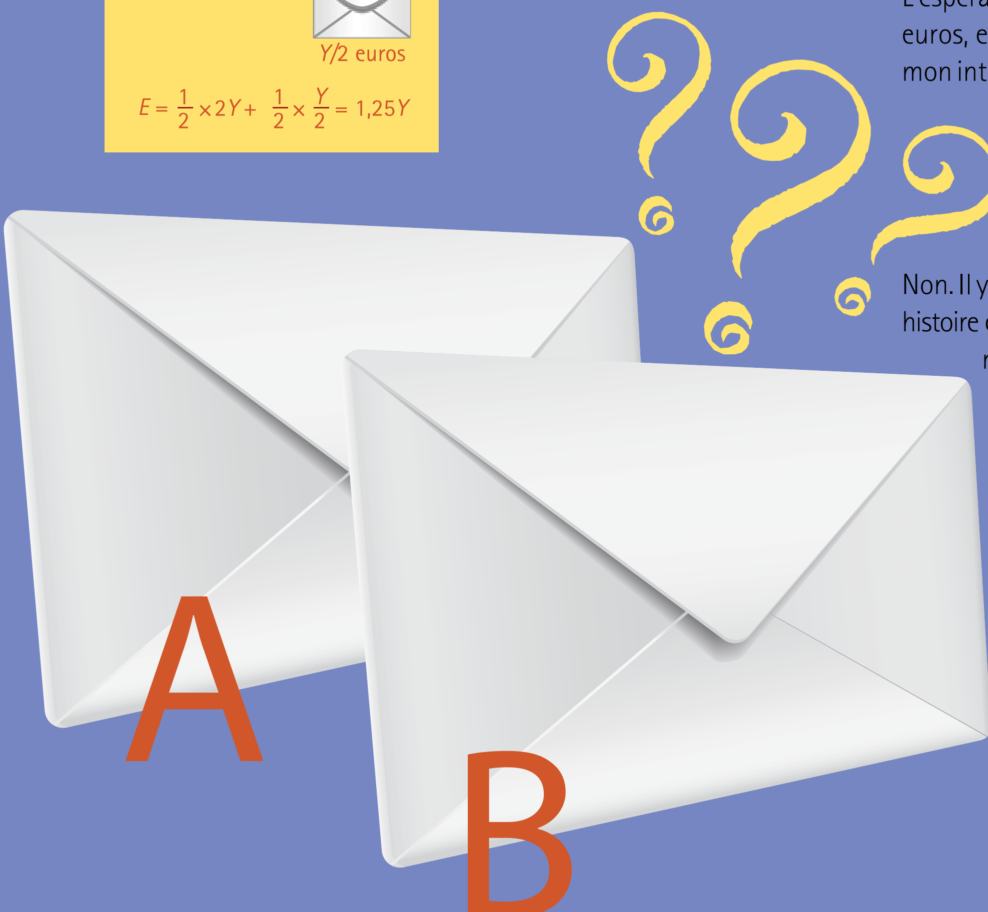
N'ayant pas de raison particulière de préférer l'une ou l'autre, je choisis d'abord l'enveloppe A. Cependant, au moment de l'ouvrir, je raisonne ainsi.

- L'enveloppe A contient une certaine somme, disons Y euros (j'ignore bien sûr quelle est cette somme).
- Il y a une chance sur deux pour que B contienne $2Y$, et une chance sur deux pour que B contienne $Y/2$ euros, car ayant choisi A au hasard, il y a autant de chances que A contienne la plus petite somme (dans ce cas B contient $2Y$ euros), ou que A contienne la plus grande somme (dans ce cas B contient $Y/2$ euros).
- L'espérance de contenu de l'enveloppe B est donc :

$$2Y \times \frac{1}{2} + \frac{Y}{2} \times \frac{1}{2} = Y + \frac{Y}{4} = \frac{5}{4} Y \text{ euros.}$$

Rappelons que l'espérance est la moyenne pondérée par les probabilités de ce que je peux gagner selon les diverses éventualités; ici c'est ce qu'on trouverait en moyenne dans l'enveloppe B, si on recommençait l'expérience un très grand nombre de fois.

L'espérance de contenu de B étant $1{,}25Y$ euros, et celle de A étant bien sûr de Y euros, mon intérêt est de changer mon premier choix et de prendre B à la place de A. En moyenne, cela me rapportera 25 % de plus.



Est-ce bien certain?

Non. Il y a quelque chose de ridicule dans cette histoire car, si au départ j'avais choisi B, le même raisonnement me conduirait maintenant à reporter mon choix sur A. Le raisonnement est donc faux. Mais, en quoi précisément est-il faux?

Solution du paradoxe précédent

Désolantes dérivées

3=2

Rappel du paradoxe précédent

La fonction $x \longrightarrow x^3$ est définie pour tout nombre réel, elle est continue et dérivable pour tout nombre réel. En calculant la dérivée par la formule habituelle, $(x^n)' = nx^n-1$, on obtient :

$$(x^3)' = 3x^2.$$

On calcule également la dérivée par le raisonnement suivant :

Pour tout entier $x \geq 2$, on écrit :

$$x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + ... + x^2.$$

La somme à droite de l'égalité comporte x fois le terme x^2.

On dérive alors de chaque côté de l'égalité en utilisant que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées :

$$(x^3)' = (x^2)' + (x^2)' + (x^2)' + ... + (x^2)'.$$

On applique alors la formule de dérivation $(x^n)' = nx^{n-1}$ rappelée plus haut et qui donne $(x^2)' = 2x$. On obtient donc

$$(x^3)' = 2x + 2x + 2x + ... + 2x = 2x^2,$$

car le terme $2x$ apparaît x fois. On doit conclure que :

Pour tout entier $x \geq 2$, nous avons donc $(x^3)' = 3x^2$ par la formule usuelle et $(x^3)' = 2x^2$ par le raisonnement détaillé. Donc, pour tout entier $x \geq 2$,

$$3x^2 = 2x^2.$$

On peut simplifier par x^2 puisque x est non nul et on obtient : 3 = 2.

Où est l'erreur ?

Solution

Le second calcul suppose que x est un entier (sinon on ne pourrait pas écrire $x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + ... + x^2$). Appelons n, l'entier fixé auquel on s'intéresse. Les fonctions :

$$x \longrightarrow x^3 \text{ et } x \longrightarrow x^2 + x^2 + x^2 + ... + x^2$$

ont effectivement la même valeur au point $x = n$ et cette valeur est n^3.

Ces deux fonctions sont dérivables pour tout nombre réel x. Cependant, autour de la valeur de n, ces deux fonctions n'ont pas les mêmes valeurs car :

$$\begin{aligned}(n+y)^3 &\neq (n+y)^2 + (n+y)^2 + ... + (n+y)^2 \\ &= n(n+y)^2\end{aligned}$$

Puisque les deux fonctions sont différentes, il n'y a aucune surprise à ce que leurs dérivées soient différentes.

Le point précis où se produit l'erreur est lorsqu'on écrit « on dérive de chaque côté », car l'équation

$$x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + ... + x^2$$

désigne une égalité valable entre deux fonctions différentes en un point précis et non deux fonctions égales sur tout leur ensemble de définition. L'erreur est en fait la même que celle que l'on commettrait en disant :

$$x = x^2 \text{ pour } x = 0, \text{ donc :}$$

$$x' = (x^2)' \text{ en } x = 0, \text{ donc } 1 = 0.$$