

# La covid en 19 que

## Problèmes (niveau collégial)

1. Soit  $q$  la probabilité qu'une personne infectée passe à la catégorie des « retirés ». Le modèle SIR suppose que, tant qu'une personne est dans la catégorie infectée, elle est contagieuse.

- Quel est le nombre moyen de jours de contagion d'un infecté ?
- Pour préciser l'interprétation du nombre  $R_0$  en relation avec le nombre moyen de personnes susceptibles qu'une personne contagieuse infectera au début de l'épidémie, réécrire  $I(n+1)$  en termes de  $I(n)$  en admettant qu'au départ, la proportion  $S(n)$  de susceptibles est pratiquement égale à 1. Puis, utiliser le résultat de la partie a) pour estimer le nombre moyen de personnes qu'une personne infecte.

2. Le modèle discret SIR de propagation d'une épidémie donne l'évolution des catégories de susceptibles, infectés et retirés (soit rétablis ou décédés). Dans ce modèle on se donne l'évolution des catégories du jour  $n$  au jour  $n+1$  sous la forme d'un système d'équations aux différences formé des trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}S(n+1) &= S(n) - pS(n)I(n), \\I(n+1) &= I(n) + pS(n)I(n) - qI(n), \\R(n+1) &= R(n) + qI(n).\end{aligned}$$

- Sous des postulats raisonnables concernant la variation des nombres de susceptibles, infectés et retirés sur un petit intervalle de temps  $\Delta t$ , transformer ce système en un système d'équations différentielles pour les populations de susceptibles,  $S(t)$ , d'infectés,  $I(t)$ , et de retirés,  $R(t)$ , au temps  $t$ .
- Montrer que  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$  est constant dans le temps.
- Dans le cadre de la méthode de dépistage par groupe canado-rwandaise, supposons que les 81 individus soient associés aux points d'un hypercube  $\{0, 1, 2\}^4$  et que l'on teste en première ronde les tranches

$x_i = t$ . Supposons aussi qu'il y ait exactement deux personnes infectées dans le groupe, ce qui conduit à examiner  $81 \times 40 = 3\,240$  cas.

- Montrer que la condition (P) énoncée dans l'article est vérifiée.
  - Soit  $k$  le nombre de valeurs de  $i$  pour lesquelles on a deux tests positifs de la forme  $x_i = s$  et  $x_i = t$ . Montrer qu'il y a  $81 \times 4 = 324$  cas si  $k = 1$ ,  $81 \times 12 = 972$  cas si  $k = 2$ ,  $81 \times 16 = 1296$  cas si  $k = 3$ , et  $81 \times 8 = 648$  cas si  $k = 4$ .
  - Si  $k = 1$ , montrer qu'il y a exactement deux personnes infectées et qu'aucun test additionnel n'est nécessaire pour les identifier.
  - Si  $k = 2$ , montrer qu'on peut avoir entre 2 et 4 personnes infectées et donc que quatre tests additionnels sont nécessaires pour identifier tous les infectés.
  - Si  $k = 3$ , montrer qu'on peut avoir entre 2 et 8 personnes infectées et donc que huit tests additionnels sont nécessaires pour les identifier toutes.
  - Si  $k = 4$ , montrer qu'on peut avoir entre 2 et 16 personnes infectées et donc que seize tests additionnels sont nécessaires pour les identifier toutes.
4. Dans le dépistage de groupe on considère l'algorithme de division binaire de la page 32 avec des rondes de tests successives sur chaque moitié de sous-groupes ayant donné un résultat positif. Dans la théorie combinatoire du dépistage par groupe, on suppose qu'on a exactement  $d$  infectés et on s'intéresse au nombre maximum,  $M_d(s)$ , de tests nécessaires pour les identifier dans le pire scénario. (Noter que, sous l'hypothèse, la première ronde est inutile.)
- Montrer que  $M_1(s) = s$ .
  - Montrer que  $M_2(s) = 2s$ .

# Questions

5. On considère l'algorithme de division binaire à trois rondes. Calculer l'espérance du nombre de tests nécessaires pour identifier toutes les personnes infectées.
6. Supposons qu'un test pour la COVID-19 ait une chance sur 40 de donner un faux positif pour un individu non infecté et une chance sur 50 de donner un faux négatif pour un individu infecté. Si la prévalence de la maladie est de 2%, calculer la probabilité qu'un individu soit positif, sachant que son test est positif.

## Projet

La démarche scientifique consiste à se poser des questions et à utiliser les outils à sa disposition pour tenter d'y répondre. Le contexte suivant se prête bien à la formulation de divers projets d'études et pourrait déboucher sur plusieurs nouvelles questions.

Depuis le début de la pandémie de COVID-19, le dépistage est effectué au moyen de tests de haute précision, relativement coûteux et difficiles d'accès, dont le résultat se fait parfois attendre pendant plusieurs jours. Y aurait-il avantage à préconiser plutôt des tests rapides, bon marché, peu précis mais faciles à réaliser à la maison, autant de fois que nécessaire ? C'est la question posée par une équipe de chercheurs de Harvard et rapportée dans un article de *La Presse* du 3 août 2020<sup>1</sup>.

L'épidémiologiste Michael Mina propose que la *Food and Drug Administration* (FDA) autorise aux États-Unis la mise en marché d'un test maison complété en 15 minutes. Un tel test produit beaucoup de faux négatifs quand le virus est présent en faible concentration. En revanche, il donne de bons résultats pour les personnes ayant une forte charge virale. Le coût unitaire du test étant inférieur à 5\$, une personne soupçonnant qu'elle a été exposée pourrait se tester plusieurs fois par semaine sans avoir à visiter une clinique de dépistage.

L'utilisation à grande échelle de tests rapides et peu fiables pourrait-elle contribuer significativement à contenir la pandémie

en identifiant un plus grand nombre de personnes contagieuses ? Le projet consiste à explorer cette piste.

- a) Contenir une épidémie, c'est contrôler le taux de reproduction de base  $R_0$ , qui correspond à peu près au nombre moyen de personnes qu'un individu porteur infectera pendant sa période de contagion.
- b) Se donner des hypothèses sur la fiabilité des tests de haute précision et des tests peu fiables. On peut explorer plusieurs hypothèses ou encore faire des recherches sur la fiabilité des tests existants.
- c) Se donner des hypothèses sur le nombre de personnes qui se feraient tester avec l'un ou l'autre type de test.
- d) Se donner des hypothèses sur le comportement des personnes en attente du résultat d'un test de haute précision : vont-elles se mettre en quarantaine ?
- e) Tenter d'évaluer l'impact de ces différentes hypothèses sur le coefficient  $R_0$ .
- f) Y a-t-il d'autres facteurs à prendre en compte ? Par exemple, la stratégie portera-t-elle fruit si les personnes économiquement faibles sont plus à risque de contracter la maladie et ne veulent pas assumer le coût des tests maisons ? Et doit-on tenir compte des effets psychologiques d'un faux positif ou sociétaux d'un faux négatif ?
- g) Peut-on élaborer une stratégie à proposer à la santé publique ?

1. <https://www.lapresse.ca/international/etats-unis/2020-08-03/covid-19-des-chercheurs-d-harvard-veulent-plus-de-mauvais-tests.php>