Hiver–printemps 2020
Solutions

Élections

La dictature d'un électeur X satisfait aux trois axiomes. En effet,

Axiome 1 (unanimité) :

Si chaque électeur préfère A à B, alors X préfère A à B. Et puisque le choix social est celui de X, alors le choix social place A avant B.

Axiome 2 (transitivité) :

La liste ordonnée de X satisfait à la transitivité. Comme elle coïncide avec le choix social, alors le choix social satisfait à la transitivité.

Axiome 3 (indépendance des alternatives non pertinentes) :

Si les électeurs changent leur ordre des candidats sans changer l'ordre relatif de A et B, alors l'électeur X n'a pas changé son ordre relatif de A et B. Comme sa liste ordonnée est le choix social avant et après que les électeurs aient changé leur ordre des candidats, l'ordre relatif de A et B dans le nouveau choix social est le même dans le choix social initial.

Codes correcteurs

a) Supposons qu'une erreur s'est produite et que a_j a été remplacé par $a_j' \neq a_j$, et posons $a_i = a_i'$ si $i \neq j$. Prenons le cas j pair. Alors,

$$\begin{aligned} b' &= \sum_{i=0}^{6} a'_{2i+1} + 3\sum_{i=1}^{6} a'_{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{6} a_{2i+1} + 3\sum_{i=1}^{6} a_{2i} + 3(a'_j - a_j) \\ &= b + 3(a'_j - a_j). \end{aligned}$$

Mais, $3(a_j' - a_j) \in \{-27,-24,\ldots,-3,3,\ldots,27\}$. Donc, b' n'est pas un multiple de 10, et on détecte une erreur. De même, si j impair.

b) Supposons que a_j et a_{j+1} aient été échangés. Posons $a_j' = a_{j+1}$, $a'_{j+1} = a_j$ et $a_i = a'_i$ si $i \neq j, j+1$. Prenons le cas j pair. Alors,

$$\begin{aligned} b' &= \sum_{i=0}^{6} a'_{2i+1} + 3\sum_{i=1}^{6} a'_{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{6} a_{2i+1} + 3\sum_{i=1}^{6} a_{2i} + 2(a'_j - a_j) \\ &= b + 2(a'_j - a_j). \end{aligned}$$

Mais

$$2(a_{j+1} - a_j) \in \{-18,-16,\ldots,-10,\ldots,-2,0,2,\ldots,10,\ldots,18\}.$$

Les seuls multiples de 10 dans cet ensemble sont 0, qui correspond à $a_{j+1} = a_j$, auquel cas ce n'est pas une erreur d'avoir échangé a_j et a_{j+1}, ou encore $|a_{j+1} - a_j| = 5$. De même, si j est impair.

c) Le dernier chiffre est 8.

Glanures mathématico-littéraires

1. **L'axiomatique de Hilbert**

Soit deux points donnés, A et B (avec $A \neq B$). En vertu du premier axiome (p. 27 du texte), il existe une droite d à laquelle appartiennent ces deux points (on dit alors que d *passe* par les points A et B).

Or le deuxième axiome (p. 27) affirme qu'il n'y a pas plus d'une droite passant par deux points donnés. (L'*existence* résultant du premier axiome est maintenant renforcée par la propriété d'*unicité* de la droite passant par deux points.)

Donc, si une droite e passe elle aussi par les points A et B, on doit avoir, par l'axiome d'unicité, que $d = e$.

Il s'ensuit que si deux droites d et e sont telles que $d \neq e$ (autrement dit, d et e ne sont pas « la même droite »), elles ne peuvent pas avoir deux points communs (ou plus). Elles peuvent alors avoir :

- soit un seul point commun
  on dit alors qu'elles *se coupent* en ce point;
- soit aucun point commun
  elles ne se coupent donc pas et on dit alors qu'elles sont *parallèles*.

(Le mot « parallèle » est introduit par Hilbert dans son traité quand il présente l'*axiome des parallèles*, dans le quatrième groupe d'axiomes.)

Note 1 :

La démonstration qui précède est bien sûr élémentaire et d'un intérêt peut-être quelque peu limité. Mais elle illustre bien l'esprit derrière une démarche axiomatique. Il va sans dire qu'au fil des 20 axiomes introduits par Hilbert, les démonstrations deviennent très rapidement à la fois exigeantes et riches. Le lecteur intéressé pourra se référer au traité de Hilbert mentionné dans le texte.

---

2. L'axiomatique de Peano

Le cadre axiomatique proposé par Giuseppe Peano pour fonder l'arithmétique des nombres naturels permet de voir — de manière un peu plus transparente que l'axiomatique introduite par David Hilbert pour la géométrie — comment interagissent les axiomes et définitions d'un système mathématique formalisé. On y observe en particulier le rôle essentiel que joue alors l'axiome 5 de Peano (le *principe de récurrence*), qui capture un aspect fondamental de ce que « sont » les nombres naturels.

Il est important d'insister sur le fait que l'objectif de ce problème est d'établir les propriétés proposées en s'appuyant uniquement sur les cinq axiomes de Peano et sur les clauses A1, A2, M1 et M2 qui, dans deux *définitions par récurrence*, viennent déterminer ce que sont l'addition et la multiplication de nombres naturels[1]. (À noter que la définition de la multiplication fait intervenir l'opération d'addition.)

1. *Ces définitions par récurrence de l'addition et de la multiplication de naturels se trouvent aussi dans le traité de Richard Dedekind* Que sont les nombres et que devraient-ils être? *(1888), légèrement antérieur à celui de Peano,* Les principes de l'arithmétique exposés selon une nouvelle méthode *(1889).*

Le seul fait mathématique que nous acceptons gratuitement dans cette démarche est que nous disposons d'une relation d'égalité = qui « se comporte bien » dans les naturels. Il s'agit donc d'une relation qui est réflexive ($n = n$), symétrique (si $m = n$, alors $n = m$) et transitive (si $m = n$ et $n = p$, alors $m = p$).

a) Cette propriété se prête bien à une démonstration par récurrence (axiome 5). Nous posons donc

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n' \neq n\}.$$

- La première étape consiste à *initialiser* la récurrence : il s'agit alors de vérifier que la propriété est vérifiée lorsque $n = 0$, ce qui est bien le cas puisque par l'axiome 3, 0 n'est pas un successeur, de sorte qu'on a forcément $0' \neq 0$ (étant donné que 0', lui, est un successeur).
- Il faut ensuite vérifier que l'ensemble E est *héréditaire* : considérant un naturel k qui appartient à E — c'est là notre *hypothèse de récurrence* (HR) —, on se demande s'il en est de même de son successeur k'.

  On sait donc (par HR) que $k' \neq k$. Il suit alors immédiatement que $(k')' \neq k'$. En effet, supposant au contraire que $(k')' = k'$, il s'ensuivrait de l'axiome 4 que $k' = k$, ce qui est en contradiction avec HR.

  On a ainsi établi que pour le k donné, son successeur k' appartient lui aussi à E, montrant ainsi que $E = \mathbb{N}$, ce qui termine la récurrence.

Note 2 : :

Ce résultat est assez élémentaire. Mais il illustre bien l'interaction des axiomes proposés par Peano en vue d'établir rigoureusement les propriétés de l'arithmétique des nombres naturels en s'appuyant sur cette seule base.

Note 3 :

Les axiomes de Peano visent à capturer la notion de « *nombre naturel* », à savoir la suite

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \qquad (\#)$$

intuitivement bien connue. Voyons ce qui en est.

On sait par l'axiome 1 qu'il y a parmi les nombres naturels un élément particulier, « *zéro* », qui n'est pas un « *successeur* » de naturel en vertu de l'axiome 3. On peut donc le voir comme une sorte de point de départ.

L'axiome 2 nous dit alors qu'il y a un autre naturel 0′ (alias 1), le successeur de 0, qui est bien sûr différent de 0 (axiome 3). Listant les nombres selon leur ordre d'apparition, pour ainsi dire, on a donc jusqu'ici

$$0, 1.$$

Puis vient, toujours par l'axiome 2, le naturel 2 (=1′ = 0″), le successeur de 1, qui doit être à la fois différent de 0 (axiome 3) et de 1 (résultat de la partie a). Nous sommes ainsi rendus à la suite

$$0, 1, 2.$$

Regardons maintenant le successeur de 2, noté 3 — donc 3 = 2′ = 1″ = 0‴. On sait qu'il est différent de 0 (axiome 3) et de 2 (partie a). Pourrait-il être égal à 1? Non, car on aurait alors 2′ = 0′, et donc 2 = 0 par l'axiome 4, ce qui est impossible encore une fois en raison de l'axiome 3 (car 2 est un successeur). Le naturel 3 est donc un « nouveau » nombre de la liste. Et on écrit, toujours selon l'ordre donné par application itérée de la fonction successeur,

$$0, 1, 2, 3.$$

Le même raisonnement s'appliquerait à 4, le successeur de 3, et à tout autre successeur qui suit : on ne « recule » jamais en arrière, obtenant ainsi une liste de nombres qui se succèdent à la queue leu leu :

$$0, 0', 0'', 0''', \cdots \qquad (\#\#)$$

Une question se pose cependant : se pourrait-il que l'ensemble des nombres résultant des axiomes de Peano soit formé, par exemple, de deux « blocs » chacun constitué d'une suite illimitée analogue à celle qui précède? Disons pour fixer les idées :

$$0, 0', 0'', 0''', \cdots \quad \alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \cdots \qquad (\#\#\#)$$

pour un certain nombre particulier α qui ne serait pas un successeur? La réponse est non, et la raison en repose sur l'axiome 5. Le *principe de récurrence dans les nombres naturels*[2] vient en effet caractériser l'ensemble $\mathbb{N}$ comme le plus petit ensemble contenant 0 et fermé par rapport à la fonction successeur, éliminant ainsi du paysage tout nombre autre que ceux auxquels on s'attend, qui figurent dans la liste (##). On vient ici de remplacer par une condition précise les points de suspension des lignes (#) ou (##) — points de suspension fort raisonnables, il faut le dire, au plan intuitif mais qui demandent néanmoins une certaine prise de conscience.

Bref, les axiomes de Peano fournissent une assise rigoureuse à l'énumération illimitée (#), une caractéristique fondamentale de cette liste étant que *tout nombre naturel est soit* 0 *soit le successeur d'un naturel*.

b) **Valeur de 3 + 2**

Pour trouver la valeur de 3 + 2 , on applique pas à pas les deux clauses A1 et A2 définissant l'addition de naturels. On rappelle ici les conventions d'écriture : 0′ = 1, 1′ = 2, 2′ = 3, etc.

$3+2$	$= 3 + 1'$	notation
	$= (3+1)'$	A2
	$= (3+0')'$	notation
	$= ((3+0)')'$	A2
	$= ((3)')'$	A1
	$= (4)'$	notation
	$= 5$	notation

Valeur de 2 + 3

Pour 2 + 3, le calcul est identique, mais un peu plus long, car on doit cette fois « réduire » 3.

$2+3$	$= 2 + 2'$	notation
	$= (2+2)'$	A2
	$= (2+1')'$	notation
	$= ((2+1)')'$	A2
	$= ((2+0')')'$	notation
	$= (((2+0)')')'$	A2
	$= (((2)')')'$	A1
	$= ((3)')'$	notation
	$= (4)'$	notation
	$= 5$	notation

2. *Il serait possible d'envisager une notion de récurrence sur un ensemble tel celui suggéré à la ligne (###). Mais cela exigerait un mécanisme de récurrence différent de celui introduit à l'axiome 5, qui vise précisément la* récurrence dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels.

Valeur de 0×3

On « s'attend » à obtenir $0 \times 3 = 0$. Mais cela prend quelques lignes...

0×3	$= 0 \times 2$	notation
	$= (0 \times 2) + 0$	M2
	$= 0 \times 2$	A1
	$= 0 \times 1'$	notation
	$= (0 \times 1) + 0$	M2
	$= 0 \times 1$	A1
	$= 0 \times 0'$	notation
	$= (0 \times 0) + 0$	M2
	$= 0 \times 0$	A1
	$= 0$	M1

c) ### L'égalité $n + 1 = n'$

Pour l'égalité $n + 1 = n'$, il n'est pas nécessaire de faire une récurrence, car le naturel 1 est à la droite du signe + et on peut donc appliquer A2. La preuve est alors directe :

$n + 1$	$= n + 0'$	notation
	$= (n + 0)'$	A2
	$= (n)'$	A1

(Bien sûr, les parenthèses à la dernière ligne sont superflues.)

L'égalité $1 + n = n'$

S'agissant de l'égalité $1 + n = n'$, il faut d'abord insister, tel que mentionné dans l'énoncé du problème, sur le fait que nous *n'avons pas* à notre disposition la commutativité de l'addition. On « ne sait donc pas » que $1 + n = n + 1$... Il faut alors se débrouiller directement avec l'expression $1 + n$. La présence du 1 à la gauche du signe + suggère de faire appel à l'axiome 5 de récurrence. Soit donc

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + n = n'\}.$$

- *Initialisation* : On voit facilement que $0 \in E$, puisque

$1 + 0$	$= 1$	A1
	$= 0'$	notation

- *Hérédité* : Soit maintenant $k \in E$ — on sait donc que $1 + k = k'$ (HR) — et il faut montrer que $k' \in E$, c'est-à-dire que $1 + k' = (k')'$. Or

$1 + k'$	$= (1 + k)'$	A2
	$= (k')'$	HR

On voit ainsi que $k' \in E$, ce qui conclut la récurrence.

Note 4 :

Ce résultat vient officialiser une intuition fort naturelle : prendre le successeur d'un naturel revient à lui additionner 1 (soit à la droite soit à la gauche, pour ainsi dire). Autrement dit, en tant que fonctions sur les nombres naturels, « ' » et « + 1 » (ou encore « 1 + ») sont identiques.

---

d) ### L'égalité $0 + n = n$

Considérons d'abord l'égalité $0 + n = n$. Comme le paramètre 0 est à la gauche du signe d'addition, on « sent » qu'il faut procéder par récurrence, la propriété A1 portant sur le cas où 0 est à la droite de +.

Soit donc

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 + n = n\}.$$

- *Initialisation* : On voit facilement que $0 \in E$: par A1, on a en effet $0 + 0 = 0$.
- *Hérédité* : Soit maintenant $k \in E$ — on sait donc que $0 + k = k$ (HR) — et il faut montrer que $k' \in E$, c'est-à-dire que $0 + k' = k'$. Or
$$0 + k' = (0 + k)' = (k)',$$
la première égalité découlant de A2 et la deuxième, de HR. On a donc établi que $k' \in E$, et la récurrence est terminée.

Note 5 :

On observera que la démonstration de l'hérédité ici suit le même schéma qu'au deuxième volet de la partie c).

Note 6 :

En combinant A1 avec l'égalité que nous venons d'établir, on a ainsi montré que le naturel 0 joue le rôle d'*élément neutre pour l'addition* : l'ajout de 0 « à la gauche ou à la droite » d'un naturel n le laisse inchangé.

L'égalité $0 \times n = 0$

Soit maintenant l'égalité $0 \times n = 0$. Ici aussi, on procède par récurrence en posant

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \times n = 0\}.$$

L'initialisation découlant directement de M1, soit un naturel k tel que $0 \times k = 0$ (HR). On obtient alors

$$0 \times k' = (0 \times k) + 0 = 0 + 0 = 0.$$

e) L'égalité $n \times 1 = n$

Le fait que $n \times 1 = n$ résulte d'un simple calcul, conjugué à un résultat déjà démontré :

$$\begin{aligned} n \times 1 &= n \times 0' && \text{notation} \\ &= (n \times 0) + n && \text{M2} \\ &= 0 + n && \text{M1} \\ &= n && \text{partie d)} \end{aligned}$$

L'égalité $1 \times n = n$

Pour établir la deuxième égalité, $1 \times n = n$, il faut procéder par récurrence. Soit donc

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \times n = n\}.$$

- *Initialisation* : On voit immédiatement que $0 \in E$, par M1.
- *Hérédité* : Soit maintenant $k \in E$ — on sait donc que $1 \times k = k$ (HR). Il faut alors montrer que $k' \in E$, c'est-à-dire que $1 \times k' = k'$. Or

$$\begin{aligned} 1 \times k' &= (1 \times k) + 1 && \text{M2} \\ &= k + 1 && \text{HR} \\ &= k' && \text{partie c)} \end{aligned}$$

ce qui complète la récurrence.

Note 7 :

Les deux égalités de cette partie montrent que 1 est l'*élément neutre pour la multiplication*.

f)
$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 2 \times 1' && \text{notation} \\ &= (2 \times 1) + 2 && \text{M2} \\ &= 2 + 2 && \text{partie e)} \end{aligned}$$

g) L'égalité $n \times 2 = n + n$ peut se montrer exactement comme à la partie f) :

$$n \times 2 = n \times 1' = (n \times 1) + n = n + n.$$

h) On sent bien qu'on doit avoir $2 \times n = n + n$. On pourrait essayer de démontrer cette égalité à l'aide des techniques utilisées jusqu'ici. Mais là, les choses commencent à se gâter un peu… Voyons voir.

Il n'y a pas de transformation évidente à exécuter sur l'un ou l'autre des deux termes apparaissant dans l'égalité donnée. Par exemple remplacer 2 par 1' ne semble pas payant, car nous sommes coincés avec un prime à la gauche du signe $\times$, alors que M2 traite du cas où le prime est à la droite. Essayons alors une récurrence.

- On voit aisément que $2 \times 0 = 0$ et que $0 + 0 = 0$. C'est bien parti.
- Supposant alors que $2 \times k = k + k$, regardons que dire de $2 \times k'$. Appliquant M2 puis l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$2 \times k' = (2 \times k) + 2 = (k + k) + 2.$$

On a ainsi abouti à une somme de trois termes, $(k + k) + 2$, dont on veut montrer qu'elle est égale à $k' + k'$. Intuitivement il s'agirait tout bonnement de décomposer le 2 en 1 + 1, puis d'« envoyer » un de ces 1 sur chacun des k. *Mais cela exige de savoir quoi dire, de manière générale, d'une somme de trois termes du type « $m + n + p$ ».*

À noter qu'une telle bibitte mathématique n'a pas encore été définie dans notre démarche à la Peano!!! En effet, les clauses A1 et A2 nous parlent uniquement de l'addition de deux naturels donnés. Autrement dit, l'addition est par définition une *opération binaire*.

On reconnaît dans cet intérêt pour l'expression « $m + n + p$ » l'essence même de la notion d'*associativité de l'addition*.

Nous nous retrouvons donc dans une situation où nous sommes amenés à établir toute une kyrielle de propriétés générales des opérations d'addition et de multiplication dans les naturels. Par exemple, l'égalité ici en question, $2 \times n = n + n$, pourrait tout simplement être tirée de la partie g) si on avait à notre disposition la propriété de *commutativité de la multiplication*, qui dit de manière particulière que $2 \times n = n \times 2$.

Nous sommes ainsi amenés à aller du côté de propriétés plus générales des opérations d'addition et de multiplication dans les naturels. La partie i) fait un pas dans cette direction, où il est question de l'associativité et de la commutativité de l'addition.

i) Associativité de l'addition

Traitons d'abord l'*associativité* de l'addition : nous allons montrer que si m, n et p sont des naturels quelconques, alors

$$(m + n) + p = m + (n + p).$$

On sent qu'une récurrence est ici de mise. Mais une question se pose : sur quelle variable allons-nous « récurrer » (hum!)? Comme la définition de l'addition (via A1 et A2) se fait du côté droit du signe +, on sent que c'est peut-être vers là qu'il faut aller.

Nous fixons donc deux naturels quelconques, m et n, et effectuons une récurrence sur p. Cela nous amène à introduire l'ensemble

$$E = \{p \in \mathbb{N} \mid (m+n)+p = m+(n+p)\}.$$

- *Initialisation* :

$$\begin{aligned}(m+n)+0 &= m+n && \text{A1 sur } (m+n)+0\\ &= m+(n+0) && \text{A1 sur } n+0\end{aligned}$$

On a ainsi vérifié que $0 \in E$.

- *Hérédité* : Soit donc un naturel $k \in E$. On a que

$$(m+n)+k = m+(n+k)\ \text{(HR)}$$

et il s'agit d'en tirer que

$$(m+n)+k' = m+(n+k').$$

Vérifions :

$$\begin{aligned}(m+n)+k' &= ((m+n)+k)' && \text{A2 sur } (m+n)+k'\\ &= (m+(n+k))' && \text{HR}\\ &= m+(n+k)' && \text{A2 sur } m+(n+k)'\\ &= m+(n+k') && \text{A2 sur } n+k'\end{aligned}$$

On a ainsi montré que $k' \in E$, et donc que la relation $(m+n)+p = m+(n+p)$ est satisfaite quels que soient m, n et p.

Note 8 :

En vertu de ce résultat, il nous est maintenant permis d'écrire une somme de trois termes $m+n+k$ (ou même plus), sans parenthèses, car la façon dont on les regroupe deux par deux n'importe pas.

Note 9 :

La récurrence précédente, où on a choisi p comme variable de récurrence, s'est déroulée de manière très limpide. Qu'en aurait-il été si on avait voulu « récurrer » sur m ou sur n ?

Si l'initialisation ne pose alors aucun problème, l'étape d'hérédité, lors de laquelle on doit manipuler un prime, devient beaucoup plus acrobatique lorsque ce prime figure à la gauche ou au milieu de l'expression. On rencontrera une difficulté analogue à cela à la partie qui suit, à propos de la commutativité de l'addition, ce qui mènera à l'introduction d'un résultat auxiliaire permettant de gérer la situation. Mais pour l'associativité de l'addition, on a accès à une solution beaucoup plus simple en choisissant la « bonne » variable de récurrence.

Commutativité de l'addition

Pour établir la *commutativité* de l'addition, il faut montrer que si m et n sont des naturels quelconques, alors $m+n = n+m$. À cette fin, nous considérons un naturel m fixe mais quelconque, et effectuons une récurrence par rapport à n. On s'intéresse alors à l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid m+n = n+m\}.$$

(À noter que l'égalité en cause, $m+n = n+m$, étant symétrique quant aux deux variables qui y figurent, il n'y a pas de différence ici si on choisit m ou n comme variable de récurrence.)

- *Initialisation* :

$$\begin{aligned}m+0 &= m && \text{A1}\\ &= 0+m && \text{partie d)}\end{aligned}$$

- *Hérédité* : Étant donné $k \in E$, on a alors $m+k = k+m$ (HR) et il s'agit de montrer que $k' \in E$, c'est-à-dire

$$m+k' = k'+m. \qquad (*)$$

Allons-y :

$$\begin{aligned}m+k' &= (m+k)' && \text{A2}\\ &= (k+m)' && \text{HR}\\ &= k+m' && \text{A2}\end{aligned}$$

Pour obtenir l'égalité (*) — et ainsi compléter la récurrence —, il faut donc prouver que

$$k+m' = k'+m, \qquad (**)$$

c'est-à-dire qu'on ne change pas la valeur d'une somme en transposant un prime d'un terme à l'autre de la somme.

L'égalité (**) est valide, mais elle demande une démonstration auxiliaire. Nous en faisons donc l'objet d'un lemme[3].

Lemme :

Si s et t sont des naturels quelconques, alors

$$s+t' = s'+t.$$

Démonstration : Par récurrence sur t, le naturel s étant fixé. On pose

$$F = \{t \in \mathbb{N} \mid s+t' = s'+t\}.$$

3. *Rappelons que dans une démarche visant à établir un certain théorème, il est d'usage d'appeler* lemme *un résultat auxiliaire dont on se sert à cette fin, et* corollaire *un résultat qui découle immédiatement dudit théorème.*

- *Initialisation* :

$$\begin{aligned} s + 0' &= (s+0)' && \text{A2}\\ &= s' && \text{A1}\\ &= s' + 0 && \text{A1}\end{aligned}$$

  de sorte que $0 \in E$.
- *Hérédité* : Soit un naturel $u \in F$. On a donc $s + u' = s' + u$ (HR), et il s'agit d'en tirer l'égalité analogue pour u', c'est-à-dire $s + (u')' = s' + u'$:

$$\begin{aligned} s + (u')' &= (s+u')' && \text{A2}\\ &= (s' + u)' && \text{HR}\\ &= s' + u' && \text{A2}\end{aligned}$$

  (On voit ici les deux primes du deuxième terme du membre de gauche de l'égalité à vérifier se répartir sur les deux termes du membre de droite.)

  On a ainsi montré que $u' \in F$, ce qui clôt la récurrence.

Faisant appel au résultat de ce lemme, on a ainsi complété la démonstration de la commutativité de l'addition.

Note 10 :

Il est possible de poursuivre cette démarche en établissant successivement les autres propriétés de base de l'arithmétique des nombres naturels :

- *distributivité de la multiplication sur l'addition* :
$$m \times (n + p) = (m \times n) + (m \times p);$$
- *associativité de la multiplication* :
$$(m \times n) \times p = m \times (n \times p);$$
- *commutativité de la multiplication* :
$$m \times n = n \times m.$$

Toujours en s'appuyant sur les axiomes de Peano, on peut démontrer diverses règles de calcul de l'arithmétique élémentaire, telles :

- *compatibilité de l'égalité avec l'addition* :
$$m = n \quad\Rightarrow\quad m + p = n + p;$$
- *simplification de l'égalité pour l'addition* :
$$m + p = n + p \quad\Rightarrow\quad m = n;$$
- *compatibilité de l'égalité avec la multiplication* :
$$m = n \quad\Rightarrow\quad m \times p = n \times p;$$
- *simplification de l'égalité pour la multiplication* :
$$p \neq 0 \text{ et } m \times p = n \times p \quad\Rightarrow\quad m = n.$$

On peut aussi traiter des égalités de base, telles

$$m + n = 0 \iff m = 0 \text{ et } n = 0$$

ou encore

$$m \times n = 0 \iff m = 0 \text{ ou } n = 0.$$

On peut définir comme suit la relation d'*ordre* dans $\mathbb{N}$:

$m \leq n$ si et seulement s'il existe un naturel k tel que $n = m + k$,

de même que la relation de *divisibilité* :

$m \mid n$ si et seulement s'il existe un naturel k tel que $n = m \times k$,

et établir leurs propriétés.

On peut également introduire la *division euclidienne* de naturels : étant donné deux naturels m et n, avec $n > 0$, on peut trouver des naturels uniques q (le *quotient*) et r (le *reste*) tels que

$$m = (n \times q) + r, \quad \text{avec } r < n.$$

Bref, toute l'arithmétique élémentaire dans $\mathbb{N}$ se trouve ainsi établie sur une base axiomatique.

Note 11 :

Le lecteur intéressé à creuser davantage une telle approche à la notion de nombre naturel pourra consulter entre autres

Corina Reischer, Réal Gélinas & André Paradis, *Nombres finis et nombres transfinis*. Presses de l'Université du Québec, 2002,

ou encore

Elliott Mendelson, *Number Systems and the Foundations of Analysis*. Academic Press, 1973.

Pour une étude plus formelle, dans le cadre de la logique du premier ordre, voir

Elliott Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic* (6e éd.). CRC Press, 2015.

Le chapitre 3 de ce livre traite du cadre formel nécessaire à la démonstration du célèbre *théorème d'incomplétude* dû à Kurt Gödel (1906-1978)[4]. Dans les premières pages du chapitre, l'auteur met en place, dans le cadre du système logique dit de l'« arithmétique du premier ordre » — qui est inspiré des axiomes de Peano —, les outils arithmétiques qui servent dans la démonstration du résultat de Gödel.

Kurt Gödel (1906-1978)

À noter qu'en tant que système formel, l'arithmétique du premier ordre diffère de manière importante du cadre des axiomes de Peano pris comme tels.

4. *Voir à ce propos l'encadré sur Kurt Gödel (p. 23) dans Bernard R. Hodgson, « Envolées intersidérales... à destination terrestre! »* Accromath, *vol. 2, hiver-printemps 2007, pp. 18-25.*

En effet, l'axiome 5 (de récurrence) de Peano est un « axiome du second ordre », car il y est question simultanément de deux types de « variables » : un ensemble *E* de nombres naturels, et un nombre naturel *n*. Une conséquence de cette formulation est que les axiomes originaux de Peano déterminent l'ensemble $\mathbb{N}$ de manière unique.

En ce qui concerne l'arithmétique du premier ordre, on peut au contraire montrer qu'il en existe des modèles autres que l'ensemble $\mathbb{N}$ que l'on cherche originellement à cerner. Cette observation a priori étonnante — on utilise même à cet égard l'expression « arithmétique non standard » pour désigner les contextes mathématiques qui en résultent — relève de considérations non élémentaires en logique mathématique. Voir à ce propos Mendelson (2015, p. 154), ou encore la section 5.4 (pp. 116-120) de

A.G. Hamilton, *Logic for Mathematicians*. Cambridge University Press, 1988.