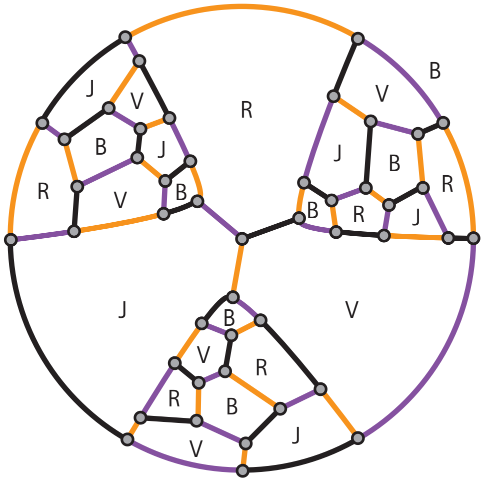
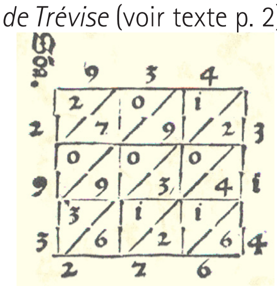
Hiver-printemps 2019
Solutions

Le théorème des trois couleurs



Émergence logarithmique

1. Avant d'attaquer le calcul du produit demandé, regardons de plus près le fonctionnement d'une jalousie. Revenons donc au calcul du produit 934×314, tel que figurant dans l'*Arithmétique de Trévise* (voir texte p. 2).



Comme on multiplie deux nombres à trois chiffres, la grille est de dimension 3×3. On y voit que chacune de ces neuf cases a été remplie à l'aide d'un « produit élémentaire », c'est-à-dire du produit des deux nombres à un chiffre correspondant à la case donnée (ces produits figurent dans la table de Pythagore pour la multiplication et sont donc connus par cœur). Par exemple, les trois cases au bas de la grille contiennent respectivement (de gauche à droite) les produits 4×9, 4×3 et 4×4. Dans le cas où le produit élémentaire est un nombre à deux chiffres, on met le chiffre des dizaines au-dessus de la barre diagonale, et celui des unités au-dessous (voir par exemple $4 \times 9 = 36$). Et si le produit élémentaire est formé d'un seul chiffre, on met 0 au-dessus de la diagonale (voir $3 \times 3 = 9$).

Revenant à l'ensemble de la grille, les bandes diagonales prennent alors tout leur sens : elles servent à structurer les valeurs positionnelles. Ainsi la case dans le bas à droite (pour $4 \times 4 = 16$), portant sur le produit d'unités, chevauche la bande des unités et celle des dizaines. Quant à la case juste au-dessus ($1 \times 4 = 4$), elle contient le produit d'une dizaine par quatre unités, et porte donc sur la bande des dizaines (et celle des centaines, mais ici avec le chiffre 0). Et ainsi de suite.

Il est intéressant de comparer cette jalousie avec les manipulations effectuées en appliquant l'algorithme usuel :

$$
\begin{array}{r}
934 \\
\underline{\times\ 314} \\
3736 \\
934 \\
\underline{2802} \\
293276
\end{array}
$$

Il est frappant que les trois produits partiels (3 736, 934 et 2 802 — c'est-à-dire en réalité 3 736, 9 340 et 280 200) correspondent de fait aux trois bandes horizontales de la jalousie, lorsque lues du bas vers le haut. Par exemple, on voit bien comment le produit partiel 3 736 peut être obtenu à partir des trois nombres 36, 12 et 16 figurant dans la bande du bas, en gérant adéquatement les valeurs positionnelles résultant du produit de 4 unités successivement par 4 unités, 3 dizaines et 9 centaines.

La méthode de la jalousie peut donc être vue d'une part comme reposant sur un support physique facilitant la gestion des valeurs positionnelles intervenant dans le calcul. Et ce support amène d'autre part un allègement du calcul mental mis en jeu, en évitant les embûches possibles créées par l'évaluation de tête des produits partiels tels $4 \times 934 = 3\,736$.

Note 1 :

Il ne faut pas perdre de vue à cet égard que la méthode de la jalousie est très ancienne : ses origines ne sont pas connues précisément, mais elle était en usage vers la fin du 13e siècle. Elle s'avérait donc particulièrement propice à une époque où des opérations arithmétiques considérées aujourd'hui comme très simples — et relevant essentiellement de l'enseignement primaire — demeuraient l'apanage de quelques privilégiés.

---

a) Comment faut-il comprendre la consigne voulant que les nombres sont représentés en base *mille*?

Dans cette base (conçue de manière analogue à notre système de numération usuel), il y a donc mille chiffres. Les voici :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... ,
99, 100, 101, ..., 999.

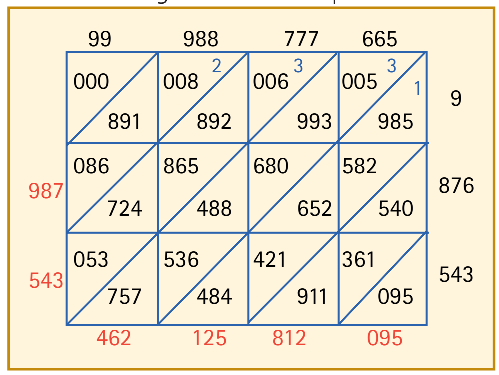
Ou peut-être, de manière plus régulière,

000, 001, 002, 003, 004, 005, 006, 007, 008,
009, 010, 011, ... , 099, 100, 101, ..., 999.

Autrement dit, chaque « chiffre », base mille, peut être vu comme formé de trois caractères pris parmi les chiffres de la base dix. Fort de cette convention, on voit alors que le nombre 99 988 777 665 (c'est-à-dire 099 988 777 665) est formé de quatre chiffres, et 9 876 543 (ou 009 876 543) de trois chiffres. On a donc besoin d'une jalousie de dimensions 4×3.

Mais alors comment trouver les produits élémentaires de deux nombres à un chiffre — ceux que nous sommes censés savoir par cœur? Une convention (naturelle) est de remplacer la connaissance des tables de Pythagore par... la bonne vieille calculatrice! Et nul besoin d'une calculatrice sophistiquée ici! Par exemple, on peut lire directement sur la calculatrice que le produit 543×665 est égal à 361 095 (voir la case dans le coin inférieur droit).

Voici donc la grille de calcul qui en résulte.



Le produit recherché,

987 543 462 125 812 095,

est indiqué en rouge sur la figure. (Les nombres en bleu sont les retenues, le cas échéant, en passant d'une bande diagonale à l'autre.)

Notons, d'un point de vue pédagogique, que sans être pour autant fabuleuse, la manipulation qui précède est à tout le moins amusante, quand on réalise qu'une simple calculatrice, avec un bon support de travail fourni par la grille, permet de trouver assez facilement un produit s'écrivant avec 18 chiffres, et ce avec une probabilité d'erreur assez faible.

Note 2 :

Observons au passage que le nombre

987 543 462 125 812 095

obtenu comme produit se lit comme suit en français :

987 billiards, 543 billions, 462 milliards,
125 millions, 812 mille, 95.

Nous utilisons ici la nomenclature résultant de l'*échelle longue* des noms de nombres, qui est d'usage en français. À cet égard, certains pays, notamment de culture anglophone, utilisent plutôt une *échelle courte*. (Pour plus d'information sur les noms numéraux, voir le solutionnaire des problèmes — disponible sur le site de la revue — se rapportant au texte suivant : Bernard R. Hodgson, « Glanures mathématico-littéraires I. » *Accromath*, vol. 11, hiver-printemps 2016, pp. 26-29.)

Note 3 :

Le truc de la base mille pourrait bien sûr être mis en œuvre avec la disposition des calculs selon l'algorithme usuel :

$$\begin{array}{r} {\color{blue}361} \\ 99\,998\,777\,665 \\ \underline{\times \quad 9\,876\,543} \\ 095 \\ \textit{etc.} \end{array}$$

Mais la jalousie rend sans doute la manipulation un peu plus confortable et minimise la probabilité d'erreur. C'était d'ailleurs l'intention derrière l'introduction de cette méthode (base dix) durant la première moitié du deuxième millénaire de notre ère.

Par contre, l'exécution à la mitaine de ce calcul avec l'algorithme usuel (base dix) est non seulement inintéressante, mais s'accompagne sans doute d'un bon risque de se tromper — ne serait-ce que dans la disposition physique des calculs intermédiaires ou le grand nombre d'étapes à parcourir.

Note 4 :

Observons que le plus grand produit qui figure dans la table de Pythagore, base mille, est $999 \times 999 = 998\,001$. Il y a là une belle analogie avec notre bon vieux $9 \times 9 = 81$ (base dix) : en effet, regardant le produit 998 001 comme un nombre à deux chiffres,

- on retrouve en position des « unités » le chiffre 1 (alias 001, base mille),
- tandis que le « chiffre » à la deuxième position est 1 de moins que le dernier chiffre de la base (999 en base mille, et 9 en base dix) — ou 2 de moins que la base elle-même, si on préfère.

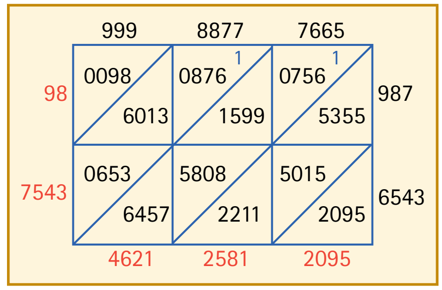
Il s'agit là de cas particuliers de la règle suivante : si on travaille dans une base b (où b est un entier plus grand ou égal à 2), alors

$$(b-1)^2 = b^2 - 2b + 1 = (b-2)b + 1.$$

b) On s'appuie maintenant sur une vision des deux nombres comme étant représentés en base *dix mille*. Les (dix mille) chiffres à notre disposition sont donc

0000, 0001, 0002, 0003, ...,
0009, 0010, 0011, ..., 0099,
0100, ..., 0999, 1000, ..., 9999,

de sorte que l'on s'intéresse au produit de 0999 8877 7665 par 0987 6543. La grille de calcul obtenue est la suivante.



Note 5 :

Dans un texte intitulé « Les mathématiques au théâtre » (*Accromath*, vol. 7, été-automne 2012, pp. 11-17), France Caron s'intéresse à un passage de la pièce *La leçon* d'Eugène Ionesco où il est question du produit de deux gros nombres. La solution qu'elle propose au problème qui accompagne ce texte (voir p. 32 de la revue) revient à écrire les nombres en base un million. Comme le produit de deux nombres à six chiffres dépasse la capacité d'affichage d'une calculatrice élémentaire, elle suggère de faire les calculs avec le logiciel Excel en utilisant le format de représentation « Nombre ».

Un tel calcul pourrait bien sûr se faire à l'aide d'une jalousie de dimensions 2×2 — ce que nous laissons aux soins du lecteur. L'encadré en haut de la page suivante indique comment il s'effectuerait selon la technique utilisée par l'auteure.

2. Faire la « preuve d'une opération », selon le dictionnaire *Le Robert*, c'est utiliser une opération autre, avec les mêmes données, afin d'en vérifier le résultat. Cet usage, attesté dès 1677, s'applique en particulier à la *preuve par neuf de la multiplication*, où on s'appuie sur le processus qui consiste à retrancher 9 (ou ses multiples) autant de fois que possible des nombres en jeu : le multiplicande, le multiplicateur et le « candidat-produit ».

   Un aspect particulier fait que la preuve par neuf est intéressante quant à sa mise en œuvre : l'opération qui consiste à enlever des multiples de 9 d'un nombre revient en pratique à faire

$99\,988\,777\,665 \times 9\,876\,543$

$$
\begin{aligned}
&= (99\,988\,000\,000 + 777\,665) \times (9\,000\,000 + 876\,543)\\
&= (99\,988 \times 10^6 + 777\,665) \times (9 \times 10^6 + 876\,543) \qquad (\#)\\
&= (99\,988 \times 9) \times 10^{12} + (99\,988 \times 876\,543) \times 10^6 + (777\,665 \times 9) \times 10^6 + (777\,665 \times 876\,543)\\
&= 899\,892 \times 10^{12} + 87\,643\,781\,484 \times 10^6 + 6\,998\,985 \times 10^6 + 681\,656\,812\,095\\
&= 899\,892 \times 10^{12} + 87\,650\,780\,469 \times 10^6 + 681\,656\,812\,095\\
&= (899\,892 + 87\,650) \times 10^{12} + (780\,469 + 681\,656) \times 10^6 + 812\,095\\
&= 987\,542 \times 10^{12} + 1\,462\,125 \times 10^6 + 812\,095\\
&= 987\,543\,462\,125\,812\,095.
\end{aligned}
$$

On aura noté, à la ligne (#), l'écriture des deux nombres à multiplier en base un million, à l'aide des quatre « chiffres » 099 988, 777 665, 000 009 et 876 543. Les manipulations des lignes qui suivent visent à bien gérer les facteurs 10^6 et $10^{12} = (10^6)^2$ en jeu dans la numération de base un million — ce que la jalousie fait gracieusement pour nous. Le produit est un nombre à trois « chiffres », base un million.

la somme de ses chiffres (en base dix). C'est ici qu'interviennent quelques notions de base de l'*arithmétique modulaire*, qui revient à travailler non sur les nombres entiers eux-mêmes, mais plutôt sur les restes obtenus quand on les divise par un certain « module ». De ce point de vue, la preuve par neuf est une application de l'arithmétique modulo 9.

Afin de faciliter la discussion, nous utilisons les notations suivantes. Nous écrivons $a \equiv b \pmod{m}$ lorsque a et b sont *congrus modulo m*, c'est-à-dire lorsque les deux restes obtenus en divisant a et b par m sont égaux. (Notons au passage que cette condition équivaut au fait que m est un diviseur de la différence $a - b$.) On accepte ici certains faits de base de l'arithmétique modulaire, notamment que les congruences peuvent s'additionner et se multiplier :

si $a \equiv b \pmod{m}$ et $c \equiv d \pmod{m}$, alors
$a + c \equiv b + d \pmod{m}$ et $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Ce phénomène de *compatibilité des opérations arithmétiques élémentaires avec la congruence modulaire* joue un rôle-clé dans ce qui suit.

a) Soit donc un entier n dont l'écriture (en base dix) est $n = a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0$ — il s'agit donc d'un nombre à $k + 1$ chiffres. Autrement dit, on a

$$
\begin{aligned}
n = {} & a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \cdots\\
& + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0.
\end{aligned}
$$

Par exemple, $934 = 9 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4$ (un nombre à trois chiffres). Travaillant modulo 9, observons tout d'abord que $10 \equiv 1 \pmod 9$. Par la compatibilité de la congruence avec la multiplication, il s'ensuit que $10^2 \equiv 1 \pmod 9$; et plus généralement il en est de même pour toute puissance de 10.

Désignons par S_n la somme des chiffres intervenant dans la représentation de n en base dix. On a donc

$$S_n = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Si on applique à répétition les propriétés de compatibilité de l'addition et de la multiplication avec la congruence, on en déduit que

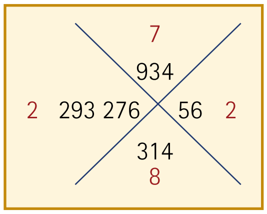
$$
\begin{aligned}
n \equiv {} & a_k \times 1 + a_{k-1} \times 1 + \cdots\\
& + a_2 \times 1 + a_1 \times 1 + a_0 \pmod 9,
\end{aligned}
$$

d'où il suit que $n \equiv S_n \pmod 9$.

On sait par exemple que $934 \equiv 7 \pmod 9$ — ce qui peut se vérifier par division euclidienne : en divisant 934 par 9, on a $934 = 103 \times 9 + 7$. Par ailleurs $S_{934} = 9 + 3 = 4 = 16$, de sorte qu'on a clairement $S_{934} \equiv 7 \pmod 9$. (Si on préfère, on aurait pu aussi répéter le processus de réduction en cherchant $S_{16} = 1 + 6 = 7$, d'où il suit $934 \equiv S_{934} \equiv S_{16} \equiv 7 \pmod 9$.)

Dit autrement, on procède donc de la manière suivante : *quand on réduit un nombre modulo 9, on répète le processus de la somme des chiffres autant de fois que nécessaire pour obtenir un reste r modulo 9, c'est-à-dire tel que* $0 \leq r \leq 8$.

Voici maintenant comment « prouver », par « abjection novenaire », que 293 276 est le produit de 934 et de 314. Comme on vient de le voir, le reste de la division de 934 par 9 est 7. De même le reste de 314 est 8. Par ailleurs le produit $7 \times 8 = 56$ de ces deux restes a comme reste 2. Mais cela est aussi le cas de 293 276, le « candidat-produit » obtenu par jalousie. Le nombre 293 276 passe donc le test — comme en témoignent les deux « 2 » à l'horizontale dans la figure qui suit.

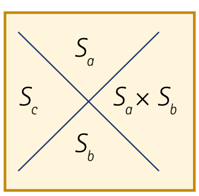


La tradition veut que les calculs dans une preuve par neuf soient représentés ainsi, à l'aide d'une croix. Mais on se borne habituellement à y inscrire les nombres figurant ici en rouge.

De manière générale, s'agissant de valider le produit de deux entiers a et b, soit donc un nombre c (le « candidat », obtenu par un certain calcul) dont on prétend que $a \times b = c$. On fait alors intervenir les sommes de chiffres S_a et S_b, ainsi que S_c, que l'on compare à $S_a \times S_b$ (un produit « facile » à calculer, car c'est le produit de deux nombres à un chiffre). Il résulte en effet des règles de l'arithmétique modulaire — au besoin en réduisant le produit $S_a \times S_b$ modulo 9 — que l'on doit forcément avoir

$$S_a \times S_b = S_{a \times b}$$

(*n'est-ce pas?*). On obtient donc la grille suivante.



Si on y observe que $S_a \times S_b \neq S_c$, alors c échoue le test et il est certain qu'il n'est pas le produit recherché. Et si $S_a \times S_b = S_c$, alors c est vraisemblablement le produit recherché, selon une certaine probabilité (sans doute assez forte).

Il y a en effet la possibilité que surgissent des « faux positifs »! Observons par exemple qu'un candidat tel 923 276 aurait lui aussi passé le test pour le produit 934 × 314, tout comme 23 276. Un « oui » n'est donc par vraiment un oui! De fait, un nombre pris au hasard a une probabilité de 1/9 d'être accepté erronément par la preuve par neuf. Mais 8 fois sur 9, il sera bloqué.

Si on se place dans un contexte d'exécution soignée d'un algorithme de multiplication, on remarque qu'une réponse positive, par la preuve par neuf, demeure un indice intéressant que le produit obtenu peut être bon... mais sans qu'on en soit sûr à 100 % ! Toutefois on comprend bien pourquoi cette technique de vérification a été fréquemment utilisée à une époque où les habiletés arithmétiques n'étaient pas monnaie courante. Insistons à cet égard sur l'aspect clé de la preuve par neuf : elle consiste à vérifier une opération arithmétique vue comme complexe (la multiplication) par une série d'opérations « faciles » (addition et multiplication de nombres à un chiffre).

Note 6 :

La congruence $n \equiv S_n \pmod 9$ est également derrière le célèbre *critère de divisibilité par 9*. Mais, à cet égard, on a de même le *critère de divisibilité par 3*, reposant lui aussi sur la somme des chiffres du nombre considéré. Bref, on a aussi la congruence $n \equiv S_n \pmod 3$, qui pourrait donc donner lieu à une « preuve par trois ». Mais les faux positifs surgiraient alors avec une probabilité de 1/3. C'est peut-être pourquoi l'histoire a plutôt retenu la preuve par neuf.

Note 7 :

Les manipulations qui précèdent pourraient bien sûr se faire sans l'emploi de la notation de congruence. Voici par exemple comment montrer directement que le reste de 293 276, lorsque divisé par 9, peut s'obtenir en faisant la somme de ses chiffres.

On a donc

$$293\,276 = 2 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10 + 6.$$

Mais notons que $10^5 = 99\,999 + 1$, et donc que le premier terme 2×10^5 peut s'écrire $2 \times 99\,999 + 2 \times 1$. Il en serait de même pour chacun des termes de cette somme, de sorte que le nombre 293 276 peut se ramener à une somme de deux termes principaux : $293\,276 = U + V$, où

$$U = 2\times 99\,999 + 9\times 9\,999 + 3\times 999 + 2\times 99 + 7\times 9,$$

et

$$V = 2\times 1 + 9\times 1 + 3\times 1 + 2\times 1 + 7\times 1 + 6 = 2+9+3+2+7+6.$$

Or U étant clairement un multiple de 9, il suffit, pour trouver le reste de 293 276 lorsqu'on le divise par 9, de se concentrer sur V, la somme de ses chiffres.

Note 8 :

Tel que mentionné dans le texte d'*Accromath*, le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) utilise l'expression *abjection novenaire* pour parler de ce qui est communément appelé preuve par neuf. On trouvera plus bas un passage où il en est question, dans lequel Leibniz se sert de cette technique (qu'il tient pour bien connue) afin d'illustrer l'idée de valider un calcul par une opération auxiliaire. Leibniz vise ici à présenter son projet de développer une sorte de « calcul » applicable aux opérations de la pensée, prenant pour modèle en cela ce qu'il appelle la « Methode des Mathématiciens ».

b) Étant donné maintenant un nombre n exprimé en base b, où $b > 1$, on vérifie aisément que $b^k \equiv 1 \pmod{b-1}$, de sorte que $n \equiv S_n \pmod{b-1}$. Une technique de « preuve par $b-1$ » (en base b) en découle immédiatement.

Ainsi, on a montré à la question 1-a, en travaillant en base mille, que

$$c = 987\,543\,462\,125\,812\,095$$

est le produit de $a = 99\,988\,777\,665$ et de $b = 9\,876\,543$. Nous vérifions ce produit en appliquant la « preuve par neuf cent quatre-vingt-dix-neuf ».

Nous calculons d'abord l'expression correspondant à S_a en faisant — à répétition — la somme (base mille) des chiffres de a :

$$99 + 988 + 777 + 665 = 2\,529,$$

et on recommence :

$$2 + 529 = 531.$$

On a ainsi obtenu 531 (un nombre à « un chiffre », base mille), c'est-à-dire que $a \equiv 531 \pmod{999}$.

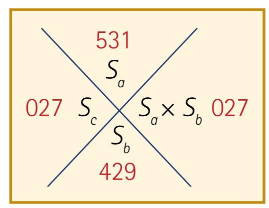
On aurait de même que $S_b = 429$ et que $S_c = 27$. Par ailleurs,

$$S_a \times S_b = 531\times 429 = 227\,799,$$

qui se ramène, modulo 999, à

$$227 + 799 = 1\,026, \text{ et donc } 27.$$

On a ainsi montré que le candidat c passe le test.



Nous laissons au lecteur le soin de faire la vérification du calcul de la question 1-b, en base dix mille.

La preuve par neuf chez Leibniz

« [S]i l'on pouvoit trouver des caracteres ou signes propres à exprimer toutes nos pensées, aussi nettement et exactement que l'arithmetique exprime les nombres, ou que l'analyse geometrique exprime les lignes, on pourroit faire en toutes les matieres autant qu'elles sont sujettes au raisonnement *tout ce qu'on peut faire en Arithmetique et en Geometrie.*

Car toutes les recherches qui dependent du raisonnement se feroient par la transposition de ces caracteres, et par une espece de calcul; ce qui rendroit l'invention de belles choses tout a fait aisée. Car il ne faudroit pas se rompre la teste autant qu'on est obligé de faire aujourd'huy, et neantmoins on seroit asseuré de pouvoir faire tout ce qui seroit faisable.

De plus on feroit convenir tout le monde de ce qu'on auroit trouvé ou conclu puisqu'il seroit aisé de verifier le calcul soit en le refaisant, soit en essayant quelques preuves semblables à celle de l'abjection novenaire en arithmetique. Et si quelqu'un doutoit de ce que j'aurois avancé, je luy dirois: contons, Monsieur, et ainsi prenant la plume et de l'encre, nous sortirions bientost d'affaire. »

G.W. Leibniz, *Préface à la Science générale (1677).* In: Couturat, Louis, dir. *Opuscules et fragments inédits de Leibniz, extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre.* Félix Alcan, 1903, pp. 155-156.

http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k68142b

Un truc « à la Gauss »

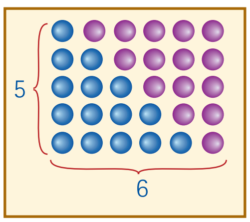
$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
T_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\
T_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2T_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}
$$

3. Nous nous intéressons tout d'abord aux deux égalités données d'entrée de jeu dans l'énoncé du problème.

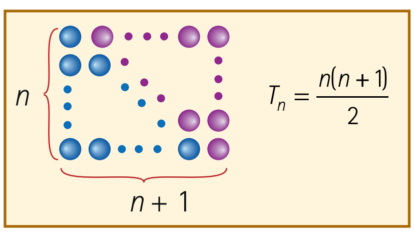
i) On vérifie aisément l'égalité $T_n = n(n+1)/2$, dans laquelle on a posé $T_n = 1+2+3+\dots+n$. On peut notamment employer à cette fin un truc « à la Gauss »[1] (voir encadré en haut de la page), écrivant deux fois la somme, dont l'une « à reculons », et additionnant ensuite colonne par colonne.

On voit alors que $2T_n = n(n+1)$, d'où suit immédiatement le résultat désiré.

On peut aussi s'appuyer sur un argument visuel : voici par exemple une figure illustrant le cas $n = 5$,



et une autre, s'appliquant cette fois au cas général :



On observera que les manipulations de l'encadré du haut de la page, lues colonne par colonne, sont une transcription algébrique de cette dernière figure, lue ligne par ligne.

Le lecteur familier avec la notion de *preuve par récurrence*[2] se souviendra peut-être — sans doute avec nostalgie, voire un brin d'émotion... — du résultat en cause ici comme étant le tout premier exemple que l'on rencontre souvent de ce type de preuve. L'argument va comme suit.

On passe d'abord par l'étape d'*initialisation* de la récurrence : il s'agit alors de vérifier que la propriété est vérifiée lorsque $n = 1$, ce qui est bien le cas :

$$T_1 = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}.$$

On s'intéresse ensuite à l'*hérédité* de la propriété en jeu : l'*hypothèse de récurrence* (alias HR) stipulant que la propriété est vérifiée pour un certain entier naturel k entraîne-t-elle qu'elle l'est également pour $k+1$? Dans le cas qui nous préoccupe, on est bien en présence d'une propriété héréditaire. En effet, supposant par HR que

$$T_k = 1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2},$$

il suit alors

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= \overbrace{1+2+\dots+k}^{T_k} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \qquad \text{(HR)} \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) \\
&= (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}
\end{aligned}
$$

On retrouve ainsi la relation

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

appliquée au cas $n = k+1$, ce qui termine le processus de récurrence.

ii) L'égalité $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$ peut se vérifier par une simple manipulation algébrique, à partir de l'égalité validée en (i). On pourrait par exemple s'appuyer sur le fait que

1. *Voir Marc Laforest et André Ross, « Géométrie des nombres. »* Accromath, *vol. 7, hiver-printemps 2012, p. 9.*
2. *Voir André Ross, « Preuves par récurrence. »* Accromath, *vol. 3, hiver-printemps 2008, pp. 26-27.*

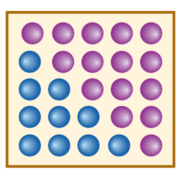
l'on peut passer d'un nombre triangulaire, $T_n = 1+2+3+...+n$, au suivant, T_{n+1}, simplement par l'ajout du terme $n+1$:

$$\begin{aligned} T_n + T_{n+1} &= T_n + [T_n + (n+1)] \\ &= 2T_n + n + 1 \\ &= n(n+1) + n + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

On aurait pu bien sûr travailler directement à partir de i) :

$$\begin{aligned} T_n + T_{n+1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}[(n^2+n)+(n^2+3n+2)] \\ &= \frac{1}{2}[2(n^2+2n+1)] \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

On pourrait aussi faire appel à une preuve visuelle : la figure qui suit, où on voit que $T_4 + T_5 = 5^2$, se généralise facilement à un n quelconque.



a) Le but de la présente démarche est d'établir un lien entre le produit de deux entiers positifs a et b et la notion de nombre triangulaire : c'est l'égalité $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$ qui va servir de liant ici.

En effet, réécrivant l'égalité élémentaire $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sous la forme

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2),$$

on peut alors voir le produit ab comme une différence où figurent des nombres carrés — chacun de ces trois carrés d'entiers étant une somme de deux nombres triangulaires —, différence que nous n'aurons ensuite qu'à diviser par 2.

Plus précisément, posant $n = a + b - 1$, l'égalité $(n+1)^2 = T_n + T_{n+1}$ devient

$$(a+b)^2 = T_{a+b-1} + T_{a+b}.$$

De la même manière, on obtient les égalités

$$a^2 = T_{a-1} + T_a \quad \text{et} \quad b^2 = T_{b-1} + T_b.$$

On en tire alors

$$ab = \frac{1}{2}[T_{a+b-1} + T_{a+b} - (T_{a-1} + T_a + T_{b-1} + T_b)].$$

Par exemple, considérant les deux nombres $a = 7\,589$ et $b = 6\,757$, on peut trouver le produit ab à l'aide de la série de calculs (élémentaires) qui suit — on suppose bien sûr ici que l'on dispose d'une table de nombres triangulaires.

On trouve dans un premier temps les trois carrés en jeu via la table de nombres triangulaires, soit d'abord pour $a+b = 14\,346$:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= T_{14345} + T_{14346} \\ &= 102\,896\,685 + 102\,911\,031 \\ &= 205\,807\,716; \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} a^2 &= T_{7588} + T_{7589} \\ &= 28\,792\,666 + 28\,800\,255 \\ &= 57\,592\,921; \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} b^2 &= T_{6756} + T_{6757} \\ &= 22\,825\,146 + 22\,831\,903 \\ &= 45\,657\,049. \end{aligned}$$

On trouve enfin

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{2}[205\,807\,716 - (57\,592\,921 + 45\,657\,049)] \\ &= \frac{1}{2}[102\,557\,746] = 51\,278\,873. \end{aligned}$$

Insistons à nouveau sur le fait — et c'est là le cœur de la méthode en jeu — que le produit ab a ici été obtenu par une série d'additions et de soustractions, suivie d'une division par 2. Comparativement à l'exécution de l'algorithme usuel de la multiplication, ces opérations arithmétiques sont considérées comme étant simples.

Note 9 :

Tel que mentionné dans l'article d'*Accromath*, un tel emploi des nombres triangulaires en vue de trouver le produit de deux entiers a effectivement été proposé au 18e siècle. Le mathématicien néerlandais Élie de Joncourt (1697-1765) a publié en

1762 son ouvrage *De natura et præclaro usu simplicissimæ speciei numerorum trigonalium* (*De la nature et des principaux usages de la plus simple espèce de nombres trigonaux*), qui contient une table des nombres triangulaires T_n pour n allant de 1 à 20 000.[3] L'exemple qui précède se retrouve dans le texte d'introduction où de Joncourt explique comment utiliser sa table afin de multiplier deux entiers.

Les commentaires qui précèdent sont inspirés de l'article suivant : Denis Roegel, « A reconstruction of Joncourt's table of triangular numbers (1762). » Projet LOCOMAT, 2013. (Ce texte est disponible à partir de la plateforme en ligne HAL — voir la section *Pour en savoir plus*.)

Notons au passage qu'au cours des années 1890, une table des nombres triangulaires de 1 à 100 000 a été construite par le Français Augustin-Armand Arnaudeau — voir Denis Roegel, « A reconstruction of Arnaudeau's table of triangular numbers (ca. 1896). » Projet LOCOMAT, 2014.

Note 10 :

On notera au passage que l'égalité $2ab = (a+b)^2 - (a^2+b^2)$ mentionnée plus haut permet de voir un produit comme pouvant être obtenu par la différence d'un carré et d'une somme de deux carrés, divisée par 2. On pourrait donc s'en servir pour calculer un produit à l'aide d'une table de carrés. À cet égard, la méthode de Ludolf ou encore la technique des quarts de carrés dont il est question dans le texte visaient à réduire le nombre d'appels à la table, ainsi que le nombre de manipulations sur de gros nombres. (On observera cependant qu'avec la méthode proposée par de Joncourt, les six nombres triangulaires en jeu surgissent deux par deux, étant des entrées consécutives dans la table.)

b) Commençons d'abord par établir l'égalité $ab = T_{a+b} - T_a - T_b$. Partant de l'identité

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

on trouve

$$T_{a+b} - T_a - T_b = \frac{1}{2}[(a+b)(a+b+1) - a(a+1) - b(b+1)],$$

3. *Le livre dans lequel est parue la table de nombres triangulaires construite par de Joncourt fait au total 267 pages, dont 244 sont consacrées à la table elle-même.*

d'où l'égalité désirée suit immédiatement.

Reprenant l'exemple de la partie a), on a maintenant les calculs suivants :

$$T_{a+b} = T_{14\,346} = 102\,911\,031,$$
$$T_a = T_{7\,589} = 28\,800\,255, \text{ et}$$
$$T_b = T_{6\,757} = 22\,831\,903,$$

d'où il suit

$$ab = 102\,911\,031 - 28\,800\,255 - 22\,831\,903$$
$$= 51\,278\,873.$$

Notons que les calculs se retrouvent ainsi passablement simplifiés, cette technique ne faisant intervenir que trois nombres triangulaires, comparativement à six avec la méthode proposée par de Joncourt.

Note 11 :

On peut se demander où on va pêcher une formule telle $ab = T_{a+b} - T_a - T_b$. Or celle-ci n'est pas trop étonnante, d'un certain point de vue. En effet, partant du fait que

$$T_{a+b} = \frac{1}{2}(a+b)(a+b+1)$$
$$= \frac{1}{2}(a^2 + ab + a + ab + b^2 + b),$$

on voit que pour isoler ab, il s'agit d'« éliminer » $a^2 + a + b^2 + b$ — ce qui peut s'obtenir en soustrayant T_a et T_b.

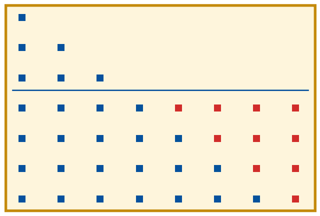
Note 12 :

Plusieurs autres identités permettent d'exprimer un produit ab en termes de nombres triangulaires. L'une d'elles est

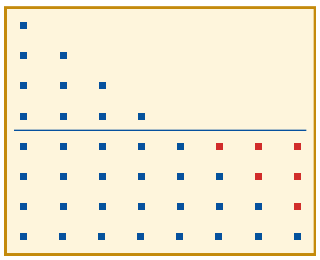
$$ab = T_{a-1} + T_b - T_{a-b-1},$$

proposée par le mathématicien anglais James Glaisher dans son article sur la méthode des quarts de carrés paru en 1889 dans la revue *Nature* — voir le *Pour en savoir plus*. Glaisher examine dans ce texte la possibilité d'utiliser une table de nombres triangulaires pour effectuer une multiplication, faisant notamment référence à la table publiée par de Joncourt. Il est intéressant d'observer qu'en plus de donner une preuve algébrique de l'expression pour ab dont il se sert, Glaisher en donne une illustration visuelle, la figure qui suit (inspirée de son texte) correspondant au produit 8×4. On y voit T_7 (le triangle de points bleus) auquel on a ajouté T_4 (en rouge), pour ensuite enlever

$T_3 = T_{8-4-1}$ (la tête de la figure). Le rectangle au bas de la figure (formé de 32 marques) donne le produit recherché.



Glaisher mentionne aussi dans son texte l'identité $ab = T_a + T_{b-1} - T_{a-b}$ accompagnée d'une figure analogue à celle-ci



en soulignant au passage que des nombres légèrement plus grands interviennent alors dans les calculs, quand on soustrait l'unité du plus petit des deux nombres a et b donnés. (Mentionnons à cet égard que Glaisher avait à cœur l'efficacité de la méthode au plan pratique.)

Glaisher souligne aussi la simplicité extrême de la construction d'une table de nombres triangulaires — même si le processus peut être un brin fastidieux —, la seule opération arithmétique y intervenant étant l'addition. Il commente également la « géométrie » derrière l'égalité $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$ en mentionnant qu'on y voit deux nombres triangulaires consécutifs comme étant les deux parties « presque égales » dans lesquelles on peut diviser un carré de points par une droite parallèle à sa diagonale.

Mais Glaisher conclut ses propos sur l'emploi des nombres triangulaires dans le calcul d'un produit en insistant sur le fait qu'une telle approche ne rivalise pas au plan pratique avec la méthode des quarts de carrés, le thème au cœur de son texte.

4. On s'intéresse aux deux égalités

$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 \qquad (*)$$

et

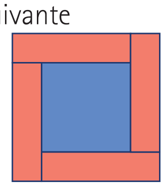
$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \qquad (**)$$

qui constituent en quelque sorte des préalables à la méthode des quarts de carrés proprement dite. La validité de ces identités se vérifie fort aisément par une simple manipulation algébrique. Par exemple, s'agissant de (*), on a

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= 4ab.$$

Or il s'avère que les relations algébriques (*) et (**) sont connues, en tant que phénomènes géométriques, depuis l'Antiquité, longtemps avant l'arrivée au 16e siècle du symbolisme algébrique maintenant familier.[4]

a) La figure suivante



montre un grand carré disséqué en quatre rectangles identiques entourant un carré central. On peut certes considérer cette figure comment connue « depuis toujours ».

Si on voit chacun des rectangles (rouges) comme étant de côtés a et b (avec $a > b$), alors le grand carré a pour côté $a + b$ et le carré bleu, $a - b$ — il faudra bien sûr s'assurer au préalable que le quadrilatère bleu est bel et bien un carré. La relation (*) suit alors immédiatement. Et de là, par un simple passage algébrique, on obtient (**).

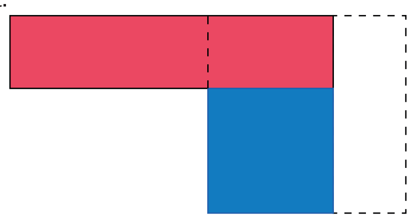
b) Le lien de l'égalité (**) avec le texte d'Euclide a déjà fait l'objet d'un problème dans un numéro précédent d'*Accromath* — voir le problème #4-b du vol. 13, été-automne 2018, p. 32, se rapportant à l'article mentionné à la note infrapaginale 4. Nous renvoyons le lecteur au solutionnaire de ce numéro d'*Accromath* pour une étude détaillée, nous bornant ici à un bref rappel.

Le texte d'Euclide peut s'interpréter comme portant sur un segment de droite AB, qui

4. *Les relations algébriques dont il est ici question peuvent même être vues comme étant dans une large mesure dans l'esprit des mathématiques mésopotamiennes. Voir à ce propos Bernard R. Hodgson, « Tours de Babel… et tours de Bagdad. »,* Accromath, *vol.13, été-automne 2018, pp. 24-29.*

a été coupé en son point milieu M, et une autre fois en un point quelconque P.

On s'intéresse alors au rectangle (rouge) formé par les deux segments inégaux AP et PB, ainsi qu'au carré (bleu) construit sur le segment compris entre les deux points M et P où AB a été coupé. Dans la proposition II.5 de ses *Éléments*, Euclide montre géométriquement que ces deux figures, prises ensemble, ont même aire que le carré (en traits discontinus) sur la moitié de AB. Sa démonstration est accompagnée de la figure qui suit.



Afin d'appliquer le résultat d'Euclide à l'égalité (**), appelons a la longueur du segment AP et b la longueur de PB. On voit immédiatement que l'aire du rectangle rouge est ab et que celle du carré en traits discontinus est

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Quant au carré bleu, son côté étant la moitié de $a - b$ (*n'est-ce pas?*), il a donc pour aire

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

De là découle aisément l'égalité (*).

5. Rappelons que la démarche proposée par Ludolf pour calculer le produit $a \times b$ est la suivante — voir l'encadré *Un calcul à la Ludolf* (p. 3) :
   - on calcule la somme du multiplicande et du multiplicateur, que l'on divise par 2 :
   $$\frac{a+b}{2};$$
   - on recherche le carré de la demi-somme dans la table :
   $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$
   - on trouve la demi-différence de a et b :
   $$\frac{a-b}{2} = a - \frac{a+b}{2};^{5}$$
   - on recherche dans la table son carré :
   $$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$
   - on a finalement le produit par soustraction des deux carrés :
   $$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

   Pour trouver le produit $9\,876 \times 543$, suivons donc ces étapes du calcul, mais en conservant d'abord scrupuleusement les parties décimales des nombres en jeu, afin de mieux voir ce qui se passe :
   - on calcule la somme du multiplicande et du multiplicateur : 10 419;
   - on en prend la moitié — 5 209,5 — que l'on élève au carré : 27 138 890,25 ;
   - on trouve la demi-différence des deux nombres initiaux en soustrayant la demi-somme du multiplicande :
   $$9\,876 - 5\,209{,}5 = 4\,666{,}5;$$
   - on élève cette demi-différence au carré : 21 776 222,25;
   - on prend la différence des deux carrés : 5 362 668.

   Il s'agit maintenant de voir comment effectuer ce calcul avec une *table de carrés d'entiers* — l'outil dont disposait Ludolf. Une solution possible serait de multiplier par 10 chacun des deux nombres de départ, transformant ainsi le produit en $98\,760 \times 5\,430$. Les demi-somme et demi-différence des nombres en jeu sont maintenant des entiers (intéressant!), et elles deviennent elles aussi affectées d'un facteur 10, et leur carré, d'un facteur 100. Il s'agit alors de diviser par 100 le résultat obtenu par la méthode de Ludolf.

   Dit autrement, on met ici en action le double fait que

   $$\frac{10a+10b}{2} = 10\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

5. *La demi-différence peut bien sûr s'obtenir en calculant la différence a — b, puis en divisant par 2. Mais la méthode proposée par Ludolf a l'avantage de ne faire intervenir qu'une soustraction.*

et que

$$\left[10\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^2=100\left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$

et de même pour $\frac{a-b}{2}$.

Joli peut-être, mais pas vraiment commode : comme les nombres ont été artificiellement gonflés, on pourrait vite dépasser la portée de la table de carrés d'entiers utilisée — celle de Ludolf, qui se rendait jusqu'à 100 000, aurait quand même convenu pour le calcul qui précède.

Revenons donc à ce qui cause problème, en lien avec notre table de *carrés d'entiers* : la partie décimale de la demi-somme 5 209,5 et de la demi-différence 4 666,5. Or ces deux nombres sont la forme $x+y$, avec x un entier et $y = 0{,}5$, de sorte que

$$(x+y)^2 = x^2 + x + 0{,}25.$$

Il s'ensuit d'une part que lors de la soustraction des carrés de la demi-somme et de la demi-différence, les parties décimales 0,25 vont s'annuler. De plus la recherche de la partie entière de chacun de ces carrés revient à additionner le carré d'un nombre avec le nombre lui-même, tâche qu'une table de carrés d'entiers rend fort aisée.

Autrement dit, les calculs à effectuer pour trouver le produit $9\,876 \times 543$ avec la table de Ludolf sont les suivants :

- on prend la partie entière de la demi-somme — 5 209 — que l'on élève au carré : 27 133 681;
- puis ajoutant 5 209, on obtient : 27 138 890;
- on procède de même à partir de la partie entière de la demi-différence — 4 666 —, ce qui donne 21 776 222;
- on prend la différence des deux derniers nombres obtenus : 5 362 668.

Nettement plus simple comme démarche!

On aura sans doute observé le lien étroit entre ces derniers calculs et ceux plus haut (où on avait conservé la partie décimale).

Note 13 :

On demande dans la question de faire le lien entre ce calcul à la Ludolf et la méthode des quarts de carrés.

Pour ce faire, voyons tout d'abord comment se fait la recherche du produit $9\,876 \times 543$ par quarts de carrés :

- dans la table des quarts de carrés, on prend l'entrée correspondant à la somme 10 419 des deux facteurs : on trouve 27 138 890;
- on fait de même pour 9 333, la différence des deux facteurs : 21 776 222;
- on prend la différence des deux nombres lus dans la table : 5 362 668.

  (Nous retrouvons ici des valeurs numériques qui nous sont familières...)

En quelque sorte, la table des quarts de carrés a été construite de manière à gérer une fois pour toutes les parties décimales intervenant dans le calcul d'un produit de deux entiers de parité différente : la table contient en effet la *partie entière* du quart du carré de chaque entrée. Quand l'entrée est paire, on y trouve alors le quart du carré lui-même. Mais pour une entrée impaire, c'est l'entier inférieur à ce quart de carré qui y figure.

Le lien entre le calcul tel que proposé par Ludolf et la table des quarts de carrés peut se concrétiser dans le fait que la fonction $qc(n)$ définissant les entrées de cette table — voir l'encadré de la p. 4 du texte d'*Accromath* — a pour valeur $k^2 + k$ quand n est un entier impair de la forme $n = 2k + 1$. Cela n'est pas sans rappeler l'égalité $(x+y)^2 = x^2 + x + 0{,}25$ (avec $y = 0{,}5$) dont il a été question un peu plus haut.

Note 14 :

Au plan pratique, l'approche proposée par Ludolf a été surclassée par la méthode des quarts de carrés. Mais il aura fallu attendre plus de 125 ans après la publication des tables de carrés d'entiers de Ludolf (1690) avant que ne soient produites des tables de quarts de carrés, indépendamment par Voisin et par Bürger (1817).

---

6. Le fait qu'un carré parfait est une somme d'entiers impairs consécutifs,

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1), \qquad (¶)$$

peut se justifier par récurrence (comme au #3 plus haut). L'étape d'initialisation étant immédiate, on suppose alors, par HR, que

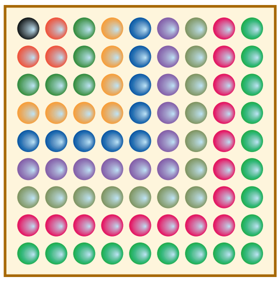
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Il suit

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2[k+1]-1) &= k^2+(2k+2-1) \quad \text{(HR)} \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2, \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

La validité de l'égalité (¶) ressort aussi d'une simple preuve visuelle. La figure qui suit est sans doute fort éloquente à cet égard,



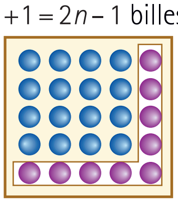
où on voit que dans le cas $n = 9$, c'est-à-dire $2n - 1 = 17$, on a bien

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17=81=9^2.$$

La généralisation à un n quelconque est immédiate.

Note 15 :

La figure qui précède peut aussi s'analyser en se concentrant sur l'ajout de la dernière couche (le « L » inversé formé de 17 billes vertes) : il s'agit alors du passage d'un carré (d'entiers) au suivant. C'est ce qu'illustre la figure qui suit, où on voit comment passer d'un carré de côté $n - 1$ (en bleu) au carré de côté n par l'ajout d'un *gnomon* (la croûte en mauve) formé de deux fois $n - 1$ billes (le long de deux côtés du carré bleu), plus une bille dans le coin; autrement dit, par l'ajout de $2(n-1)+1=2n-1$ billes.



On a ainsi montré géométriquement que

$$n^2 = (n-1)^2 + (2n-1), \quad (¶¶)$$

c'est-à-dire : le carré de côté n est formé du carré précédent, de côté $n - 1$, auquel on ajoute $2n - 1$.

Note 16 :

On pourrait s'inspirer de l'égalité (¶¶) pour donner une autre preuve algébrique de l'identité (¶). En effet, réécrivant (¶¶) sous la forme

$$(2n-1) = n^2 - (n-1)^2,$$

on voit que tout impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés successifs. Par exemple, $17 = 81 - 64 = 9^2 - 8^2$. Revenant à la somme des impairs de 1 à 17, on aurait donc

$$\begin{aligned} &17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \\ &= (9^2-8^2)+(8^2-7^2)+(7^2-6^2)+(6^2-5^2) \\ &+(5^2-4^2)+(4^2-3^2)+(3^2-2^2)+(2^2-1^2)+(1^2-0^2). \end{aligned}$$

Un phénomène de « télescopage » se met alors en branle, où l'on voit des termes successifs se bouffer l'un l'autre : -8^2 et 8^2, -7^2 et 7^2, ..., jusqu'à -1^2 et 1^2, de sorte que la valeur 9^2 en résulte.

Plus généralement, faisant appel à la notation sigma pour la somme, on aurait

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}(2j-1) &= \sum_{j=1}^{n}\left[j^2-(j-1)^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n}(j-1)^2 \\ &= n^2, \end{aligned}$$

seul le tout premier terme de ces sommes, n^2, survivant au télescopage.

7. a) Tel que suggéré dans l'encadré de la p. 6, nous utilisons l'identité trigonométrique

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

pour évaluer le produit $6{,}21 \times 0{,}257$.

Afin de nous ramener à des valeurs de la fonction sinus, nous posons tout d'abord $a = 0{,}621$ et $b = 0{,}257$ et nous cherchons dans la table trigonométrique des angles α et β tels que $a \approx \sin\alpha$ et $b \approx \sin\beta$. Comme on y lit que $\sin 38{,}4° = 0{,}6211$ et $\sin 14{,}9° = 0{,}2571$ (à quatre positions décimales), nous prenons respectivement $\alpha = 38{,}4°$ et $\beta = 14{,}9°$.

Étapes du calcul :

- $\alpha + \beta = 53{,}3°$ et $\alpha - \beta = 23{,}5°$,
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos 23{,}5° = 0{,}9171$ (à l'aide de la table),
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos 53{,}3° = 0{,}5976$ (idem),
- $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 0{,}9171 - 0{,}5976 = 0{,}3195$,

- $\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)=\frac{0,3195}{2}$
$= 0,15975.$

Le produit $a \times b$ est donc approximativement 0,15975. Revenant au produit d'origine, on trouve alors

$$6,21 \times 0,257 = 10(a \times b) = 1,5975.$$

Pas si mal, si on compare avec la valeur obtenue par un calcul à la mitaine, 1,595 97. On aura noté que le calcul qui précède n'a fait intervenir, outre la recherche de valeurs dans la table trigonométrique et une simple division par 2, que des additions ou soustractions. C'était précisément là l'idée de la méthode de prosthaphérèse.

b) Comme on travaille maintenant avec la formule

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta),$$

on cherche donc des angles α et β tels que $\cos\alpha \approx 0,621$ et $\cos\beta \approx 0,257$. On prend, à partir des données de la table trigonométrique, $\alpha = 51,6°$ et $\beta = 75,1°$. Il suit alors

- $\alpha + \beta = 126,7°$ et $\alpha - \beta = -23,5°$,
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos(-23,5°) = \cos 23,5°$
$= 0,9171$ (à l'aide de la table),
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(126,7°)$
$= -\cos(180° - 126,7°)$
$= -\cos 53,3° = -0,5976$ (idem),
- $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 0,9171 - 0,5976$
$= 0,3195,$
- $\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)=\frac{0,3195}{2}$
$= 0,15975,$

d'où le résultat suit, comme à la partie a).

Note 17 :

On aura remarqué que les deux angles appelés α, dans les parties a) et b), sont complémentaires — et de même pour les deux angles appelés β. Ce qui explique que ce sont finalement exactement les mêmes valeurs numériques qui interviennent dans les calculs de ces deux parties.

---

c) Diviser a par b revient à évaluer le produit

$$a \times \frac{1}{b}.$$

Si on applique l'identité trigonométrique de la partie b), il s'agit donc de trouver des angles α et β tels que $\cos\alpha = a$ et $\cos\beta = \frac{1}{b}$, c'est-à-dire $\frac{1}{\cos\beta} = \sec\beta = b.$

Il s'agit alors d'ajuster les nombres a et b en conséquence, pour respecter les valeurs prises par les fonctions trigonométriques cosinus et sécante.

Appliquons par exemple cette approche à la division $6,21 \div 0,257$, c'est-à-dire

$$6,21 \times \frac{1}{0,257}.$$

On s'intéresse donc dans un premier temps au produit auxiliaire

$$0,621 \times \frac{1}{2,57}.$$

On lit dans les tables trigonométriques que $\cos 51,6° \approx 0,621$ et que $\sec 67,1° \approx 2,57$, de sorte que

$$\cos 67,1° \approx \frac{1}{2,57}.$$

Autrement dit, évaluer le produit auxiliaire revient à trouver le produit $\cos 51,6° \times \cos 67,1°$. Posant $\alpha = 51,6°$ et $\beta = 67,1°$, on calcule alors successivement :

- $\alpha + \beta = 118,7°$ et $\alpha - \beta = -15,5°$,
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos(-15,5°) = \cos 15,5°$
$= 0,9636$ (à l'aide de la table),
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(118,7°)$
$= -\cos(180° - 118,7°)$
$= -\cos 61,3° = -0,4802$ (idem),
- $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$
$= 0,9636 - 0,4802 = 0,4834,$
- $\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)=\frac{0,4834}{2}$
$= 0,2417.$

Enfin, réajustant les puissances de 10 en jeu, on en tire que le résultat de la division $6,21 \div 0,257$ est

$$\left(0,621 \times \frac{1}{2,57}\right) \times 10^2, \text{ c'est-à-dire } 24,17.$$

8. Nous nous intéressons ici à des identités logarithmiques fondamentales — et bien connues! La base b ayant été fixée — ce b étant un réel strictement positif différent de 1 —, nous posons dans ce qui suit $x = b^u$ et $y = b^v$, de sorte que $u = \log_b x$ et $v = \log_b y$. Nous tenons ici pour acquises les propriétés régissant le comportement des exposants (et appliquées à des réels quelconques).

a) Étant donné que

$$\frac{x}{y} = \frac{b^u}{b^v} = b^{u-v},$$

on voit immédiatement que

$$\log_b \frac{x}{y} = u - v = \log_b x - \log_b y.$$

b) Le résultat suit de

$$x^y = (b^u)^y = b^{uy} = b^{yu}.$$

c) $\sqrt[y]{x} = x^{1/y} = \left(b^u\right)^{1/y} = b^{[1/y]u}.$

d) Observons que

$$x^v = \left(b^u\right)^v = \left(b^v\right)^u = y^u.$$

L'égalité qui en résulte, $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$, est certes une jolie curiosité!

e) Nous posons maintenant $x = a^w$, c'est-à-dire $w = \log_a x$. On a alors

$$\log_b x = \log_b a^w = w \log_b a,$$

de sorte que

$$w = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Notons que l'égalité $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ est très utile en pratique, par exemple lorsqu'il s'agit, pour un réel x donné, de passer de son logarithme dans une certaine base à une autre.

9. En raison de l'outil de travail proposé — une table de logarithmes pour les nombres de 100 à 1000 avec des mantisses à quatre positions décimales —, nous travaillons donc pour l'essentiel avec des nombres à trois chiffres significatifs. Mais on verra qu'il est possible, par interpolation linéaire, d'aller chercher un quatrième chiffre.

a) Posant $x = \dfrac{3480 \times 1265}{0{,}00143}$, il est commode d'écrire chacun des nombres en notation scientifique, de manière à gérer d'emblée les puissances de 10 en jeu :

$$x = \frac{(3{,}48 \times 10^3) \times (1{,}265 \times 10^3)}{1{,}43 \times 10^{-3}} = \frac{3{,}48 \times 1{,}265}{1{,}43} \times 10^9.$$

Le problème revient alors à trouver le logarithme de $y = \dfrac{3{,}48 \times 1{,}265}{1{,}43}$, un nombre obtenu par multiplication et division à partir de trois réels écrits avec la virgule décimale en position standard, c'est-à-dire des réels entre 1 et 10. Les logarithmes de chacun de ces trois nombres ont donc comme caractéristique 0 et leur mantisse peut être lue dans la table. On a ainsi que $\log 3{,}48 = 0{,}5416$ et $\log 1{,}43 = 0{,}1553$. Quant à $\log 1{,}265$, on trouve dans la table les deux entrées $\log 1{,}26$ $0{,}1004$ et $\log 1{,}27 = 0{,}1038$. Comme 1,265 est à mi-chemin entre 1,260 et 1,270, il devient tentant de prendre la moyenne des deux valeurs de la table : 0,1021 — nous revenons plus bas sur cette étape. Ce faisant, on trouve alors

$$\begin{aligned}\log y &= \log 3{,}48 + \log 1{,}265 - \log 1{,}43\\ &= 0{,}5416 + 0{,}1021 - 0{,}1553\\ &= 0{,}4884.\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de trouver l'antilogarithme de 0,4884, c'est-à-dire le nombre dont le logarithme a pour mantisse 0,4884. Or cette valeur ne figure pas comme telle en tant que mantisse dans notre table. Mais on y trouve les deux valeurs voisines $0{,}4871 = \log 3{,}07$ et $0{,}4886 = \log 3{,}08$. On voit donc que 0,4884 est le logarithme d'un nombre entre 3,07 et 3,08, et vraisemblablement plus près de 3,08 en raison du petit écart entre 0,4884 et 0,4886. On « sent » même que le nombre y recherché serait environ 3,079.

Pour rendre ces considérations plus solides, on procède par *interpolation linéaire* (voir encadré à la page suivante).

À propos d'interpolation linéaire

Dans un calcul logarithmique avec approximation par *interpolation*[6] *linéaire*, l'hypothèse de travail est la suivante :

sur un « petit » intervalle, la fonction logarithme se comporte presque comme une fonction linéaire.

Autrement dit, on accepte le graphe de la fonction $\log x$, sur un tel intervalle, comme étant près de celui d'une droite, de sorte que la variation de $\log x$, pour une « faible » variation de x, est approximativement proportionnelle à la variation de x (et vice versa). On peut donc utiliser les proportions qui en découlent — par une bonne vieille « règle de trois » — afin d'approximer le nombre recherché.

La notion d'interpolation linéaire est bien sûr applicable à des contextes autres qu'un calcul logarithmique, l'idée demeurant d'intercaler des valeurs intermédiaires dans une série de valeurs connues, sous l'hypothèse que la variation des valeurs est proportionnelle à celle d'une droite tout le long de l'intervalle en cause.

Une table de valeurs numériques (fonctions logarithmiques, trigonométriques, etc.) contient forcément un nombre fini de valeurs. Lorsque la valeur recherchée tombe entre deux de ces données, on peut procéder en « polissant » le graphe de la fonction sur l'intervalle en jeu de manière à le transformer en droite : lesdites valeurs intermédiaires suivent alors par simple proportionnalité linéaire.

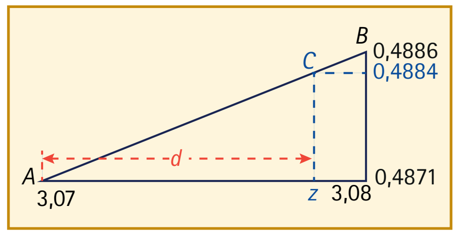
Bien sûr, le degré de précision sur les nouvelles valeurs ainsi obtenues est directement lié à la précision des valeurs fournies par la table.

L'emploi de telles tables (logarithmes, etc.) et les techniques d'interpolation qui les accompagnent furent à une époque des outils essentiels dans les applications mathématiques. Mais l'arrivée, au milieu des années 1970, des calculatrices avec leur nombre quasi illimité de valeurs numériques — et encore davantage l'omniprésence de l'ordinateur personnel — a rendu en pratique désuètes de telles manipulations calculatoires.

6. *Du latin* interpolare, *« réparer, refaire », mot relié à* inter, *« entre »,* et polire, *« rendre uni, polir ». Le mot a été introduit en mathématiques au début du 19e siècle.*

Par exemple, dans le cas qui nous concerne, on fait comme si les valeurs de $\log x$, entre les points 3,07 et 3,08, étaient sur une droite. La figure qui suit (non à l'échelle) montre les points du plan cartésien en cause : d'une part les deux points $A(3{,}07;\ 0{,}4871)$ et $B(3{,}08;\ 0{,}4886)$, et d'autre part le point $C(z;\ 0{,}4884)$ dont il faut déterminer l'abscisse z.

(À noter que le véritable graphe de $\log x$ entre les points A et B aurait une forme légèrement courbée, mais c'est le segment de droite AB qui sert ici pour l'approximation.)



En s'appuyant sur les rapports de triangles semblables, on voit que

$$\frac{d}{0{,}01} = \frac{0{,}0013}{0{,}0015},$$

ce qui peut se lire comme suit : comme l'ordonnée du point C est au 13/15 de la différence entre les ordonnées de B et de A, alors son abscisse z est elle aussi au 13/15 de la différence entre les abscisses de B et de A.

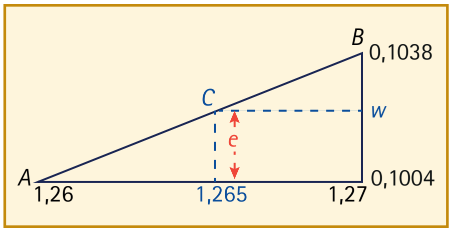
Il suit donc que $d = 0{,}008\overline{6}$. Approximant à la 3e décimale, on prendra $d = 0{,}009$, de sorte que $z = 3{,}07 + d = 3{,}079$, tel que pressenti.

On en conclut ainsi — en vertu du degré de précision mis en œuvre — que

$$x = 3{,}079 \times 10^9 = 3\ 079\ 000\ 000.$$

Note 18 :

La technique de l'interpolation linéaire permet maintenant de rendre plus rigoureux le calcul de $\log 1{,}265$ — voir ci-haut. Rappelons que l'on trouve dans la table les valeurs $\log 1{,}26 = 0{,}1004$ et $\log 1{,}27 = 0{,}1038$ et que l'on cherche à en déduire $\log 1{,}265$. La figure résultant de l'interpolation linéaire est donc la suivante,



où l'on connaît les coordonnées des deux points $A(1{,}26; 0{,}1004)$ et $B(1{,}27; 0{,}1038)$, et l'on recherche l'ordonnée w du point $C(1{,}265;\ w)$. On a alors, en vertu des triangles semblables,

$$\frac{e}{0{,}0034} = \frac{0{,}005}{0{,}01};$$

la longueur e est donc bel et bien la moitié de la hauteur du grand triangle, de sorte que $e = 0{,}0017$ et $w = 0{,}1004 + e = 0{,}1021$.

Note 19 :

Les outils modernes (tel le logiciel Maple) nous apprennent instantanément qu'une valeur plus précise du x tel que donné serait (à l'entier près) $x = 3\ 078\ 461\ 538$ — ou si l'on préfère $x = 3\ 078\ 461\ 538{,}\overline{461\ 538}$, en allant chercher « toutes » les décimales. Il faudrait bien sûr juger d'après le contexte le sens que l'on pourrait accorder (ou non) à une telle pluie de chiffres... Il est sans doute bon de rappeler ici que les logarithmes ont été créés essentiellement dans le but d'obtenir une valeur numérique comportant un certain nombre de chiffres significatifs, à partir de données obtenues par des processus de mesure forcément limités quant au nombre de chiffres de précision (par exemple lors de mesures en astronomie ou en navigation, ou lors d'expériences en laboratoire).

Les limites inhérentes au nombre de chiffres de précision acceptables résultant d'un calcul à l'aide des logarithmes peuvent être perçues en se bornant, dans le calcul précédent, à l'évaluation du simple produit $t = 3\,840 \times 1\,265 = 4\,402\,200$.

Travaillant avec les logarithmes, on a alors

$$\begin{aligned}\log t &= \log 3\,480 + \log 1\,265\\ &= 3{,}5416 + 3{,}1021\\ &= 6{,}6437.\end{aligned}$$

Utilisant les techniques d'interpolation linéaire que nous venons de discuter, on trouve que l'antilogarithme de 0,6437 est 4,402 (avec un quatrième chiffre de précision), de sorte que la valeur ainsi obtenue pour t est $10^6 \times 4{,}402 = 4\,402\,000$.

Mais on pourrait rétorquer qu'en raison du facteur 2/9 intervenant dans le processus d'interpolation linéaire, l'antilog est plutôt $4{,}40\overline{2}$, ce qui mènerait à 4 402 222. Mais il faut sans doute se garder une petite gêne ici...

Contrairement à une méthode telle les quarts de carrés, les logarithmes n'ont pas pour but de donner une réponse précise, chiffre par chiffre, mais plutôt une valeur numérique avec un ordre de grandeur (la puissance de 10 en jeu) et un certain nombre de chiffres significatifs — selon la précision de la table de logarithmes utilisée.

---

b) Nous nous bornons dans ce qui suit à esquisser les étapes des calculs en jeu, laissant au lecteur l'interprétation géométrique de l'interpolation linéaire.

Puisque $0{,}04786 = 4{,}786 \times 10^{-2}$, on a $\log 0{,}04786 = -2 + \log 4{,}786$.

On lit dans la table les valeurs

$\log 4{,}78 = 0{,}6794$ et $\log 4{,}79 = 0{,}6803$. Comme

$$4{,}786 = 4{,}780 + \frac{6}{10}(4{,}790 - 4{,}780),$$

on obtient, en vertu de l'hypothèse de linéarité,

$$\begin{aligned}\log 4{,}786 &= \log 4{,}780 + \frac{6}{10}(\log 4{,}790 - \log 4{,}780)\\ &= \log 4{,}780 + \frac{6}{10}(0{,}6803 - 0{,}6794)\\ &= \log 4{,}780 + 0{,}00054,\end{aligned}$$

et donc $\log 4{,}786 = 0{,}6799$ (à quatre positions décimales). On en conclut que

$$\log 0{,}04786 = -2 + 0{,}6799 = \overline{2}{,}6799.$$

c) Posant $x = \dfrac{32{,}64}{757{,}2}$, on a donc

$$\log x = \log 32{,}64 - \log 757{,}2.$$

On trouve, par interpolation, que $\log 32{,}64 = 1{,}5137$ et que $\log 757{,}2 = 2{,}8792$, d'où il suit que

$$\begin{aligned}\log x &= 1{,}5137 - 2{,}8792\\ &= -2 + 0{,}6345 = \overline{2}{,}6345.\end{aligned}$$

On lit directement dans la table que l'antilogarithme de 0,6345 est 4,31, de sorte que $x = 4{,}31 \times 10^{-2} = 0{,}0431$ (avec trois chiffres significatifs).

d) Étant donné que

$$\log \sqrt[5]{0,234} = \frac{1}{5}\log 0,234,$$

on cherche d'abord

$$\log 0,234 = -1 + \log 2,34 = -1 + 0,3692.$$

Comme on doit diviser par 5, il est commode d'écrire

$$\begin{aligned}\log 0,234 &= -1 - 4 + 4 + 0,3692\\ &= -5 + 4,3692.\end{aligned}$$

On a alors $\log \sqrt[5]{0,234} = -1 + 0,87384$, ce qui, ramené à quatre positions décimales, donne $\log \sqrt[5]{0,234} = -1 + 0,8738$. Il reste donc à trouver l'antilogarithme de 0,8738; pour ce faire, comme on a

$$\log 7,47 = 0,8733 \text{ et } \log 7,48 = 0,8739,$$

on prend donc

$$\begin{aligned}7,470 + \frac{5}{6}(7,480 - 7,470) &= 7,478\overline{3}\\ &\approx 7,478.\end{aligned}$$

Et on trouve finalement

$$\sqrt[5]{0,234} = 7,478 \times 10^{-1} = 0,7478.$$

Note 20 :

À l'aide de la calculatrice, on voit aisément que $\sqrt[5]{0,234} = 0,747899$ (à six décimales près). Une meilleure approximation à quatre décimales serait donc 0,7479 (plutôt que 0,7478, tel que nous venons de l'obtenir). On pourrait retrouver cette valeur en conservant la cinquième décimale dans l'expression $\log \sqrt[5]{0,234} = -1 + 0,87384$ (cf. plus haut). On voit alors, lors de l'interpolation linéaire, que l'antilogarithme de 0,87384 est donné par

$$7,470 + \frac{54}{60} \times 0,01 = 7,479,$$

d'où l'on obtient finalement

$$\sqrt[5]{0,234} = 7,479 \times 10^{-1} = 0,7479.$$

À noter que la gestion de tels phénomènes lors de l'utilisation des logarithmes est toujours un peu délicate. On peut observer à cet égard que les écarts entre deux mantisses consécutives, dans la table de logarithmes, sont plus courts pour les grandes valeurs de la table que pour les petites – ce phénomène est lié à la variation du taux de croissance de la fonction log *x*. On voit par exemple que

$$\begin{aligned}\log 8,89 - \log 8,88 &= 0,9489 - 0,9484\\ &= 0,0005,\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}\log 1,89 - \log 1,88 &= 0,2765 - 0,2742\\ &= 0,0023.\end{aligned}$$

Conséquemment les effets « fins » de l'interpolation linéaire ne sont pas les mêmes partout dans la table, ce qui a évidemment un impact sur la précision des approximations qui en découlent.

Note 21 :

Certaines tables de logarithmes proposent même, pour chaque ligne de la table, une colonne de *parties proportionnelles* indiquant explicitement, pour chaque valeur de 1 à 9 prise comme quatrième chiffre de l'entrée, la valeur à ajouter à la mantisse en cause pour obtenir le résultat du processus d'interpolation. Mais il nous a semblé pertinent ici de voir en soi en quoi consiste cette interpolation linéaire à partir des valeurs de la table.