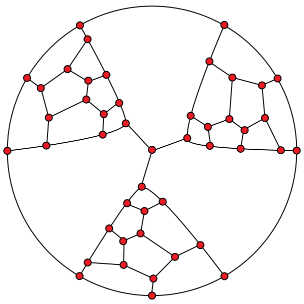
Section problèmes



Euclide II.5

Si une droite est coupée en deux segments égaux et en deux segments inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière, pris avec le carré sur le segment compris entre les points de section, est égal au carré sur la moitié de la droite.

Le théorème des trois couleurs

Montrer que les arêtes du graphe ci-contre peuvent être coloriées avec trois couleurs de telle sorte que les arêtes attachées à chaque sommet soient de couleurs différentes.

Émergence logarithmique

1. Une jalousie peut aider à trouver le produit de deux « gros » nombres.

   a) Évaluer le produit

   $$99\,988\,777\,665 \times 9\,876\,543$$

   en considérant que les nombres sont représentés en base mille.

   (*Tuyau :* Il s'agit donc du produit d'un nombre « à quatre chiffres » par un nombre « à trois chiffres ».)

   b) Reprendre le calcul en travaillant en base dix mille.

2. Un entier $m \geq 2$ étant fixé (le *module*), deux entiers a et b sont dits *congrus modulo m* si les restes obtenus en les divisant par m sont égaux.

   a) Après avoir montré qu'un entier n est congru, modulo 9, à la somme de ses chiffres, justifier la preuve par neuf donnée (p. 2) pour le produit 934×314.

   Que dire de la présence de faux positifs dans une preuve par neuf ?

   b) Montrer plus généralement qu'un entier, lorsqu'exprimé en base b, est congru à la somme de ses chiffres, modulo $b-1$.

   Donner une «preuve par neuf cent quatre-vingt-dix-neuf» du calcul effectué à la question 1-a.

3. Étant donné un entier positif n, le n^e nombre triangulaire est

   $$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

   On montre facilement (n'est-ce pas ?) que

   $$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } T_n + T_{n+1} = (n+1)^2.$$

   Voici deux méthodes pour trouver un produit à l'aide d'une table de nombres triangulaires.

   a) Étant donné deux entiers positifs a et b, exprimer chacun des carrés $(a+b)^2$, a^2 et b^2 comme une somme de deux nombres triangulaires. En tirer une méthode pour évaluer le produit ab à l'aide d'une table de nombres triangulaires.

   b) Travailler à partir de l'égalité

   $$ab = T_{a+b} - T_a - T_b$$

   (que vous vérifierez).

4. Les deux expressions (p. 3) d'un produit ab en termes de la différence de deux carrés sont d'origine fort ancienne.

   a) Interpréter la preuve visuelle résultant de la figure de la p. 3.

   b) Relier ces expressions à la proposition 5 du Livre II des *Éléments* d'Euclide (voir ci-contre), où il est question d'un problème d'aires.

5. On s'intéresse au produit de deux entiers de parité différente, par exemple 9876×543. Montrer, par un calcul à la Ludolf (voir p. 3), comment obtenir ce produit à partir d'une table de carrés. Faire le lien avec la méthode des quarts de carrés.

6. À propos de la construction d'une table de quarts de carrés (voir encadré p. 4), montrer que

   $$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1).$$

7. a) Multiplier 6,21 et 0,257 par prosthaphérèse (voir p. 6).

   b) Refaire le calcul en vous appuyant sur l'identité trigonométrique

   $$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta).$$

   c) Que dire d'une division par prosthaphérèse?

8. Établir les identités logarithmiques de l'encadré ci-contre.

9. Effectuer les calculs suivants à l'aide d'une table de logarithmes décimaux[1]. (Au besoin, procéder par interpolation linéaire à partir des valeurs de la table.)

   a) $\dfrac{3480 \times 1265}{0{,}00143}$ c) $\dfrac{32{,}64}{757{,}2}$

   b) $\log 0{,}04786$ d) $\sqrt[5]{0{,}234}$

1. Voir http://accromath.uqam.ca/accro/wp-content/uploads/2019/01/TableLogarithmes.pdf

Quelques identités logarithmiques

a) $\log_b \dfrac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$;

b) $\log_b x^y = y \log_b x$;

c) $\log_b \sqrt[y]{x} = \dfrac{1}{y}\log_b x$;

d) $x^{\log_b y} = y^{\log_b x}$;

e) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.