Section problèmes

Tours de Babel… et tours de Bagdad

1. Étant donné l'équation quadratique

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (*)$$

la méthode du *complément* (ou de *complétion*) *du carré* permet, par manipulation algébrique, d'obtenir les deux racines r_1 et r_2 (réelles ou complexes, éventuellement égales).

a) Trouver l'expression de ces racines en ramenant l'équation à la forme

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad (**)$$

et en la transformant de sorte que le membre de gauche devienne un carré.

b) Variante : revenant à (*), procéder en multipliant l'équation par $4a$.

c) Autre démonstration : partant de (**), le changement de variable

$$y = x + \frac{b}{2a}$$

permet d'isoler y^2.

2. En travaillant en base soixante, vérifier chacune des étapes du calcul de la tablette YBC 4663 (p. 26).

3. Soit deux segments de longueur x et y (avec $x > y$).

a) Montrer, à l'aide d'un argument géométrique visuel (alias *preuve sans paroles*), que

$$y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

b) Faire de même pour les égalités

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \text{ et } y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

4. On considère un rectangle dont les côtés x et y satisfont aux équations $x - y = b$ et $xy = c$. Trouver l'expression générale de la solution découlant de l'interprétation géométrique de la tablette YBC 4663 (pp. 26-27).

5. Le problème 25 de la tablette BM 85200 + VAT 6599[1] est du type $x + y = b$ et $xy = c$. Il y est question d'un rectangle d'aire 8;20 dont la somme des côtés est 5;50. La procédure de résolution figure dans l'encadré qui suit.

BM 85200 + VAT 6599

- *Prendre la moitié de 5;50, donc 2;55.*
- *L'élever au carré, 8;30,25.*
- *Soustraire 8;20, ce qui donne 0;10,25.*
- *En trouver la racine carrée, 0;25.*
- *Ajouter 0;25 à 2;55 et l'en soustraire, obtenant ainsi les deux côtés 3;20 et 2;30.*

a) Donner une interprétation géométrique de cette procédure.

b) En tirer une formule (notation moderne) pour la solution générale.

6. Étant donné deux réels positifs x et y (avec $x > y$), on considère l'identité remarquable

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2, \qquad (***)$$

connue depuis fort longtemps.

a) Montrer comment elle peut servir dans l'interprétation des méthodes mésopotamiennes de résolution de problèmes quadratiques.

b) Outre par manipulation algébrique (moderne), on peut justifier (***) de plusieurs façons, notamment : comme corollaire de la Proposition 5 du Livre II des *Éléments* d'Euclide (voir l'encadré ci-après); en travaillant dans un demi-cercle de diamètre $x + y$, ou bien dans un carré de côté

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2};$$

ou encore à partir de l'identité bien connue $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$.

Euclide II.5

Si une droite est coupée en deux segments égaux et en deux segments inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière, pris avec le carré sur le segment compris entre les points de section, est égal au carré sur la moitié de la droite.

7. Compléter la résolution du problème de la tablette AO 8862 (pp. 27-28).

8. S'intéressant à l'équation $x^2 + 10x = 39$ (notation moderne), al-Khwarizmi justifie géométriquement, et à deux reprises, sa méthode de résolution : en considérant la *moitié* du nombre de racines (10), et aussi le *quart*.

a) Tracer une figure géométrique à l'appui de chacune de ces deux démonstrations.

b) Faire de même dans le cas général $x^2 + bx = c$. En tirer une formule (moderne) exprimant la solution d'al-Khwarizmi.

1. *Tablette en deux fragments, l'un étant au British Museum à Londres et l'autre à Berlin, au Vorderasiatisches Museum (collection du Proche-Orient du Pergamonmuseum).*