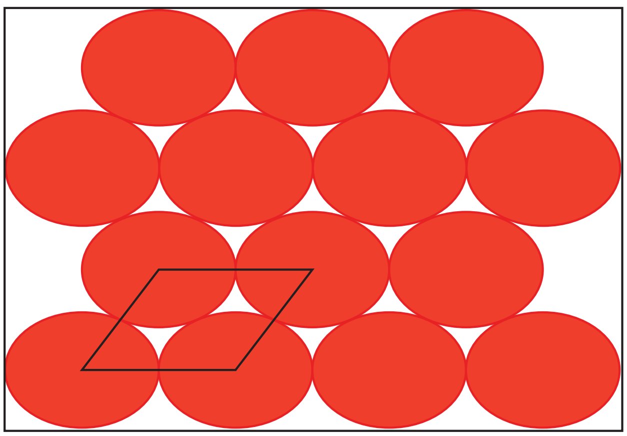
Hiver–printemps 2018

Solutions

Meilleur empilement

1. Regardons le parallélogramme.



La densité totale est égale à la densité à l'intérieur du parallélogramme, puisqu'on peut paver le plan avec de tels parallélogrammes. Les morceaux d'ellipses à l'intérieur du parallélogramme ont une aire égale à une ellipse complète, soit πab. La densité est donc πab divisé par l'aire du parallélogramme, qui est égale à sa base multipliée par sa hauteur. La base vaut $2a$. Pour la hauteur, il faut réfléchir un peu. Cette hauteur vaut deux fois la hauteur entre l'axe horizontal d'une ellipse et le point de tangence avec une ellipse de la rangée supérieure. Les centres de ces deux ellipses tangentes sont espacés horizontalement de a. Pour des raisons de symétrie, le point de tangence est alors à la distance horizontale $a/2$ du centre de l'ellipse.

Mettons $x = a/2$ dans l'équation d'une ellipse de demi-axes a et b

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

On obtient :

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

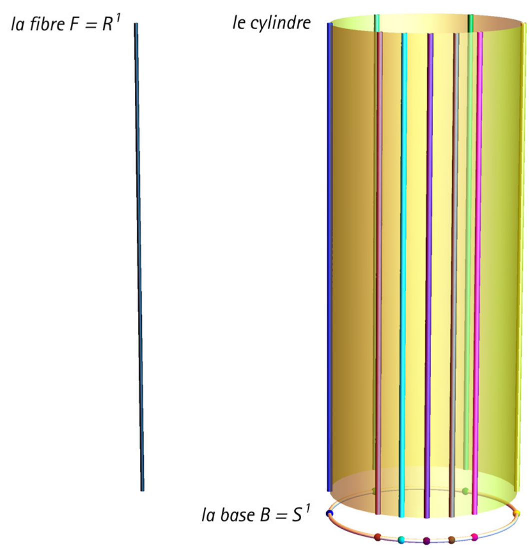
c'est-à-dire $y=\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$.

Donc, la hauteur du parallélogramme est $b\sqrt{3}$ et son aire est $2ab\sqrt{3}$. La densité est :

$$\frac{\pi ab}{2ab\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=d_2.$$

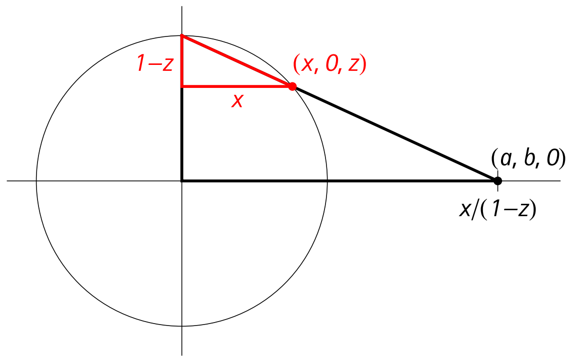
Fibration de Hopf

1. La figure suivante montre comment les fibres $F=\mathbb{R}$ sont incluses dans le cylindre.



2. Si la coordonnée y du point (x, y, z) est nulle, alors les triangles semblables de la figure suivante donnent :

$$(a, b, 0) = (x/(1-z), 0, 0).$$



Si y n'est pas nul, un argument similaire donne :

$a = x/(1-z)$ et $b = y/(1-z)$.

3. La fibration de la première figure ne peut pas être utilisée, car la propriété 4 ne sera pas satisfaite : les fibres sur les parallèles proches du pôle sud ne se déformeront pas continûment en la fibre du pôle sud.

Le cas Archimède

1. Parmi la foultitude de preuves visant à montrer l'irrationalité du nombre réel $\sqrt{2}$, plusieurs reposent sur un raisonnement par l'absurde. Afin de montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, on supposera donc au contraire que l'on a :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

avec a et b des entiers (que l'on peut considérer tous deux positifs). On travaille alors à partir de l'égalité :

$$a^2 = 2b^2, \qquad (*)$$

où $a,\, b \in \mathbb{N}$ (et $b \neq 0$).

Il sera commode, dans les arguments qui suivent, de voir (*) comme une équation à résoudre et dont on cherche des solutions entières.

a) L'argument le plus connu repose sur la notion élémentaire de *parité* : tout nombre entier est soit pair (i.e., de la forme $2k$) soit impair (i.e., de la forme $2k + 1$), où k est un entier. Observons de plus, en préliminaires, que le carré d'un entier pair est forcément pair :

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2u, \text{ avec } u = 2k^2;$$

tandis que le carré d'un impair est impair :

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$
$$= 2v + 1, \text{ avec } v = 2k^2 + 2k.$$

Revenant à l'égalité (*), supposons qu'elle a des solutions entières a et b. L'entier a^2 est donc pair, d'où il suit que a lui-même est pair — argument par contraposition[1], s'appuyant sur la remarque préliminaire : le carré d'un impair est impair.

Comme on a supposé la fraction a/b irréductible[2], on en tire que l'entier b est forcément impair, car sinon le numérateur et le dénominateur de a/b seraient divisibles par 2.

L'entier a étant pair, il est de la forme $a = 2c$, de sorte que $a^2 = 4c^2$. Par substitution dans (*), il suit alors que $4c^2 = 2b^2$ et donc que $b^2 = 2c^2$. Comme b^2 est un entier pair, on en conclut, comme précédemment, que b lui-même est pair. Contradiction avec le fait qu'il doit être impair.

Note 1 :

Après avoir établi le fait que a est pair, on pourrait aussi conduire l'argument en observant que b est lui aussi pair (comme on vient tout juste de l'établir), de sorte que la fraction a/b est réductible, car divisible par 2. Contradiction alors avec l'hypothèse d'irréductibilité.

Note 2 :

Cet argument est reconnu comme étant très ancien. Ainsi, alors qu'il présente dans l'*Organon*[3] le principe de raisonnement par l'absurde, Aristote (~384 – ~322) utilise justement le résultat dont il est ici question comme archétype afin d'illustrer ce mode d'argumentation[4]. Dans Les *Premiers Analytiques* (I.23), il exprime la contradiction en disant que « les nombres impairs deviendraient égaux aux

---

1. *On utilise ici l'équivalence logique entre l'implication $P \to Q$ et sa contraposée $\neg Q \to \neg P$.*
2. *On notera que cette hypothèse se fait sans perte de généralité, car si $\sqrt{2}$ était représenté par une fraction réductible, on n'aurait qu'à réduire cette fraction à sa plus simple expression. (La notion de « réduction » dont il est ici question est bien sûr un* changement de forme, *et non de* valeur.*)*
3. *On désigne par* Organon *(« outil » ou « instrument », en grec ancien) l'ensemble des six traités d'Aristote portant principalement sur la logique. L'expression* Organon *n'est pas d'Aristote, ayant été introduite par ses disciples, les Péripatéticiens. (Ce mot vient du grec* περιπατητικοζ, *« qui aime la promenade ». La légende veut qu'Aristote aimait à enseigner tout en marchant.)*
4. *À noter cependant que pour Aristote, il ne s'agit pas d'établir « l'irrationalité de $\sqrt{2}$ » (ce vocabulaire et cette notation sont modernes), mais plutôt l'« incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré ». On revient sur cet aspect à l'exercice 3.*

nombres pairs ». Quoique le Stagirite ne soit pas explicite à cet égard, tout porte à croire qu'il fait alors allusion à un raisonnement tel celui qui précède, où un certain nombre (b en l'occurrence) est à la fois pair et impair.

b) Le cœur de cette preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ repose sur un fait fondamental de l'arithmétique dans les entiers : la représentation d'un entier (positif) sous la forme d'un produit de nombres premiers se fait d'une seule façon (à l'ordre des facteurs près). C'est ce qu'on appelle l'*unicité de la factorisation première*. Ainsi 777 777 s'écrit comme :

$$3 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$

(habituellement abrégé comme :

$$3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 37).$$

Observons par ailleurs que dans la factorisation première d'un carré parfait, tous les facteurs premiers sont affectés d'un exposant pair. Il suffit pour s'en convaincre de considérer un exemple : étant donné $n = 5^3 \times 7^4 \times 11^5$, on a alors :

$$\begin{aligned} n^2 &= (5^3 \times 7^4 \times 11^5)^2 \\ &= 5^{2\times3} \times 7^{2\times4} \times 11^{2\times5} \\ &= 5^6 \times 7^8 \times 11^{10}. \end{aligned}$$

Convenons en outre, par commodité, de dénombrer les facteurs premiers en tenant compte de leur multiplicité. Ainsi l'entier n qui précède (qui possède trois facteurs premiers *distincts*) comprend en tout $3 + 4 + 5 = 12$ facteurs premiers — c'est-à-dire 12 occurrences de facteurs premiers, les facteurs 5, 7 et 11 étant présents respectivement 3 fois, 4 fois et 5 fois. Il s'ensuit que son carré n^2 a $24 = 2 \times 12$ occurrences de facteurs premiers — le double des occurrences dans n.

Forts de ces préliminaires, considérons maintenant les factorisations premières des deux entiers a et b intervenant dans l'égalité (*), et comptons le nombre de facteurs premiers y apparaissant. Appelant x et y le nombre de facteurs premiers dans les factorisations premières de a et de b respectivement, il s'ensuit alors que :

- la factorisation première de a^2 contient $2x$ facteurs premiers,
- la factorisation première de b^2 contient $2y$ facteurs premiers, et
- la factorisation première de $2b^2$ contient $2y + 1$ facteurs premiers.

  Mais alors, l'entier a^2 — qui est le même que l'entier $2b^2$ — possède à la fois un nombre pair (à savoir $2x$) et impair ($2y + 1$) de facteurs premiers, ce qui est en CONTRADICTION avec le fait que la factorisation première d'un entier est unique. (Insistons sur le fait que nous n'avons pas eu à supposer ici l'irréductibilité de la fraction a/b.)

Note 3 :

Il serait possible de reformuler l'argument précédent en mettant l'accent sur le facteur premier 2. Revenant à l'égalité (*), intéressons-nous aux occurrences de 2 de chaque côté de l'égalité. Tel que vu précédemment, l'entier a^2 va contenir le facteur premier 2 un nombre pair de fois (éventuellement nul); il en est de même pour b^2. Mais alors $2b^2$ contient le facteur premier 2 un nombre impair de fois, et pourtant il est égal à a^2. CONTRADICTION.

De manière analogue, on pourrait montrer que le réel $\sqrt{5}$ est irrationnel en se ramenant à une égalité du type $a^2 = 5b^2$, avec a et b entiers, et en regardant les occurrences du facteur premier 5 de chaque côté de l'égalité.

Et dans le même esprit, l'irrationnalité de $\sqrt{6}$ découle de l'égalité $a^2 = 6b^2$, portant notre attention sur l'un des facteurs premiers de 6 — disons 3.

Note 4 :

Plus généralement, on peut établir le résultat suivant :

le réel $\sqrt{n}$, pour $n \in \mathbb{N}$, est un nombre rationnel si et seulement si n est un carré parfait,

c'est-à-dire le carré d'un entier.

La démonstration de ce résultat se fait en deux temps. La flèche « aller » ($\Rightarrow$) peut s'obtenir par contraposition : si n n'est pas un carré parfait, alors sa racine carrée est forcément irrationnelle, par un argument semblable à ceux de la note 3. Et la flèche « retour » ($\Leftarrow$) suit tout bonnement du fait que lorsque n est un carré parfait, alors sa racine est par définition même un entier (et donc un rationnel).

Les entiers naturels dont la racine carrée est irrationnelle sont donc précisément ceux qui ne sont pas des carrés parfaits :

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, ...

Note 5 :

Toujours en s'appuyant sur la notion de factorisation première, il est possible d'articuler de manière légèrement différente les commentaires des notes 3 et 4. On a en effet le résultat suivant, élémentaire mais informatif :

soit $r \in \mathbb{Q}$; alors $r^2 \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $r \in \mathbb{Z}$.

Comme il est clair que r^2 est un entier lorsque r est un entier, nous nous concentrons sur l'implication $r^2 \in \mathbb{Z} \rightarrow r \in \mathbb{Z}$. Supposons donc que le rationnel $r^2 = a^2/b^2$ est un entier, disons $r^2 = k$. Il s'ensuit alors que $a^2 = kb^2$, de sorte que les facteurs premiers présents dans b^2 se retrouvent tous dans a^2 (en vertu de l'unicité de la factorisation première). Mais tel qu'observé précédemment, les facteurs premiers de b^2 sont (en leur espèce) précisément les facteurs premiers de b, les occurrences de chacun d'eux étant dupliquées. Et il en va de même pour les facteurs premiers de a^2. Forcément alors les facteurs premiers de b sont tous présents dans a, ce qui montre que le rationnel $r = a/b$ est de fait un entier[5].

Nous venons de montrer que le seul cas où un nombre rationnel élevé au carré donne un entier est quand ce rationnel est lui-même un entier. Autrement dit, passant à la contraposée $r \notin \mathbb{Z} \rightarrow r^2 \notin \mathbb{Z}$, le carré d'un rationnel non entier ne sera jamais un entier. Il n'y a donc pas de rationnel qui, élevé au carré, donne 2, ou encore 6.

---

c) Cette technique de preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ part d'une observation toute simple à propos des carrés parfaits : s'agissant par exemple de l'entier 876 543 212 345 678, on voit « à l'œil » qu'il n'est pas un carré d'entier — tout simplement parce qu'il se termine par le chiffre 8.

Revenant donc aux deux entiers a et b présents dans l'égalité (*), intéressons-nous à leur écriture décimale respective, ainsi qu'à celle des deux membres de cette égalité. Il est clair que le chiffre des unités d'un entier résultant d'une élévation au carré ne dépend que du chiffre des unités du nombre dont on est parti — on n'a qu'à penser à la façon dont le chiffre des unités de ce carré serait obtenu en appliquant l'algorithme de multiplication usuel. Et on voit aussi que l'on peut suivre à la trace le chiffre des unités du double d'un carré.

De manière plus précise, le tableau suivant résume l'information quant au chiffre des unités d'entiers de la forme n^2 et $2n^2$ en fonction du chiffre des unités d'un entier n.

Chiffre des unités		
n	n^2	$2n^2$
0	0	0
1	1	2
2	4	8
3	9	8
4	6	2
5	5	0
6	6	2
7	9	8
8	4	8
9	1	2

Appliquons ces observations à l'égalité (*). Comme le seul élément commun aux deux dernières colonnes du tableau est le chiffre 0, on voit que la seule façon d'avoir $a^2 = 2b^2$, avec $a, b \in \mathbb{N}$, est que les entiers a^2 et b^2 aient tous deux 0 comme chiffre des unités. Mais alors l'entier a se termine forcément par 0, et l'entier b, par 0 ou 5. Et dans ces deux cas, la fraction a/b serait réductible par un facteur 5 commun au numérateur et au dénominateur. Or on peut, comme à la partie (a), supposer sans perte de généralité que cette fraction est irréductible. CONTRADICTION.

d) Supposant maintenant que les entiers a et b de l'égalité (*) sont écrits en base trois, considérons la table de multiplication (des nombres à un chiffre) dans cette base.

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

On voit, à l'examen de la diagonale principale de la table, que le chiffre des unités d'un carré écrit en base trois est 0 ou 1, tandis que le chiffre des unités du double d'un carré est 0 ou 2. L'égalité $a^2 = 2b^2$ n'est donc possible que si a et b se terminent par 0, auquel cas

5. Comme il va de soi, cet entier est $\sqrt{k}$.

ils sont tous deux des multiples de 3. Mais encore une fois on peut se donner une fraction a/b irréductible. CONTRADICTION.

Note 6 :

Cette solution est donc analogue à celle de la partie (c), à la nuance de la base près. Et dans les deux cas, le tout pourrait s'exprimer à l'aide de l'arithmétique modulaire, plutôt qu'en termes de chiffres des unités dans une base donnée. Ainsi, s'agissant de la solution (d), on vérifie aisément que le carré d'un entier est congru, modulo 3, à 0 ou à 1. En effet, divisant les entiers en trois classes, selon leur reste modulo 3, on voit que :

$$(3v)^2 = 9v^2 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$(3v+1)^2 = 9v^2 + 6v + 1 \equiv 1 \pmod 3,$$
$$(3v+2)^2 = 9v^2 + 12v + 4 \equiv 1 \pmod 3.$$

L'égalité $a^2 = 2b^2$ entraîne donc que les entiers a^2 et $2b^2$ sont tous deux congrus à 0, mod 3, ce qui contredit l'hypothèse d'irréductibilité de la fraction a/b.

---

e) Soit deux entiers positifs a et b satisfaisant à l'égalité (*). Comme nous visons un raisonnement s'appuyant sur une « descente infinie », l'idée est de trouver une fraction équivalente à a/b mais de numérateur strictement inférieur à a. À cette fin, nous travaillons à partir de l'entier a donné.

De l'égalité $a^2 = 2b^2$ suit que $a^2 > b^2$, et donc $a > b$ (car $a, b \in \mathbb{N}$). Cette dernière inégalité revenant à l'existence d'un entier positif t tel que $a = b + t$, on a donc $a^2 = b^2 + 2bt + t^2$. Il suit alors, par substitution de ce trinôme dans le membre de gauche de (*), que :

$$2bt + t^2 = b^2,$$

et donc $b^2 > t^2$ (puisque les entiers b et t sont positifs). Cette dernière inégalité entraîne à son tour que $b > t$, d'où l'existence d'un entier positif s tel que $b = t + s$. Observons qu'on peut exprimer a en termes de t et de s :

$$a = b + t = (t + s) + t = 2t + s.$$

Substituant alors les expressions $a = 2t + s$ et $b = t + s$ dans l'égalité (*), on trouve que :

$$(2t + s)^2 = 2(t + s)^2,$$

c'est-à-dire :

$$4t^2 + 4ts + s^2 = 2t^2 + 4ts + 2s^2.$$

En simplifiant, il suit que $s^2 = 2t^2$, ce qui nous ramène à une égalité analogue à (*), mais avec des paramètres inférieurs. En particulier on voit que $a > s$, puisque $a = 2t + s$ avec t un entier positif.

On a donc trouvé des entiers (positifs) s et t qui sont des solutions de l'équation (*) et avec s inférieur à a. (Dit autrement, on a obtenu une fraction s/t équivalente à a/b mais de numérateur s strictement inférieur à a.) Or le même raisonnement pourrait être appliqué indéfiniment, menant ainsi à une suite illimitée et strictement décroissante d'entiers positifs et inférieurs à a. Or une telle suite d'entiers doit être forcément finie. CONTRADICTION.

On peut résumer le nœud de cette démonstration comme suit :

s'il existait deux carrés à côtés entiers dont l'un a une aire double de l'autre, on pourrait trouver deux autres carrés plus petits satisfaisant aux mêmes propriétés.

Note 7 :

On pourrait aussi exprimer la descente infinie en mettant en relief la suite strictement décroissante d'entiers (positifs)

$$a > b > s > t > \cdots$$

En effet, de l'égalité $b = t + s$ suit que $b > s$.

Note 8 :

L'argument de la partie (e) pourrait se formuler en termes de « bon ordre ». Il s'agit alors de considérer l'égalité (*) sous l'hypothèse que le numérateur a est le plus petit entier positif pour lequel cette équation peut être résolue — autrement dit, a est le plus petit numérateur parmi ceux de toutes les fractions égales à $\sqrt{2}$ (et de numérateur et dénominateur positifs). Une telle hypothèse s'appuie sur le *principe de bon ordre*, qui affirme que tout sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément. La mise en évidence d'un entier positif s inférieur à a et satisfaisant à (*) est alors en CONTRADICTION avec le fait qu'on avait supposé que a est le plus entier ayant cette propriété.

Note 9 :

On notera que l'idée de descente infinie est très ancienne, se retrouvant notamment au cœur de la proposition VII.31 des *Éléments* d'Euclide (env. ~325 – ~265), alors que le grand mathématicien grec démontre que tout nombre composé est divisible par un certain nombre premier. Le raisonnement repose sur l'observation qu'un nombre composé peut s'écrire comme un produit de facteurs. Si l'un de ces facteurs est premier, c'est gagné. Et sinon, on recommence : on prend l'un des dits facteurs (composés) et on l'écrit à nouveau comme un produit de facteurs. On obtient ainsi une suite d'entiers positifs de plus en plus petits : une telle suite doit forcément se terminer. Selon les mots d'Euclide, appelant A le nombre composé donné au départ,

> *l'investigation étant poursuivie de cette façon, un certain nombre premier sera trouvé qui mesurera[6] A. Car s'il ne s'en trouvait pas, des nombres en quantité illimitée mesureraient le nombre A, dont chacun serait plus petit que le précédent; ce qui est impossible dans les nombres. (*Euclide, *Les Éléments*, Livre VII, proposition 31*)*[7]

Dans ses commentaires à propos de l'argument d'Euclide, Vitrac (p. 341) y voit « une forme démonstrative que l'on peut légitimement rapprocher de la méthode dite de « descente infinie » rendue célèbre par Fermat ». Pierre de Fermat (1601–1665) a décrit cette méthode dans une lettre datant d'août 1659 adressée à Pierre de Carcavi (env. 1600–1684).

La méthode de descente infinie repose sur le principe du bon ordre (voir note 8), caractéristique de l'ordre dans les naturels.

---

f) Cette démonstration ne fait pas intervenir l'égalité (*) en tant que telle, mais repose plutôt sur l'hypothèse de départ voulant que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. On introduit alors k, le plus petit entier naturel tel que $k\sqrt{2}$ est lui-même un entier naturel.

Posant $j = k\sqrt{2} - k$, on a alors que $j < k$ (puisque $\sqrt{2} < 2$). Mais observons que :

$$j\sqrt{2} = (k\sqrt{2} - k)\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}.$$

Or le dernier membre de cette série d'égalités est une différence de deux entiers naturels (dont le premier est plus grand que l'autre), et donc un naturel. On a ainsi montré que $j\sqrt{2}$ est un entier naturel (avec $j > k$), ce qui est en CONTRADICTION avec l'hypothèse voulant que k soit le plus petit naturel dont le produit par $\sqrt{2}$ donne un naturel.

En bref,

> *si un entier $k > 0$ est tel que $k\sqrt{2}$ est un entier (positif), alors $j = k\sqrt{2} - k$ est un entier (positif) satisfaisant à la même propriété, et inférieur à k.*

2. Afin de préparer le terrain pour la preuve d'irrationnalité demandée, examinons d'abord de plus près le théorème sur lequel elle s'appuie. Il s'agit d'un résultat (relativement) élémentaire de la théorie des polynômes.

> *Soit*
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$
> *un polynôme à coefficients entiers (avec $a_n \neq 0$). Si $p/q \in \mathbb{Q}$ est une racine de P, exprimée sous forme irréductible, alors p est un diviseur de a_0 et q est un diviseur de a_n.*

Démonstration :

Évaluant le polynôme P au point $x = p/q$, on trouve :

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

c'est-à-dire, multipliant chaque membre de cette égalité par q^n,

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \quad (**)$$

Dans un premier temps, récrivant cette égalité sous la forme :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n,$$

on voit que p divise le membre de gauche de l'égalité, car il est un facteur de chacun des termes de la somme. Il divise donc aussi le membre de droite. Mais par hypothèse les entiers p et q sont premiers entre eux, de sorte que p doit être un diviseur du coefficient a_0. Le raisonnement serait semblable pour q, récrivant cette fois (**) sous la forme :

$$a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = -a_n p^n,$$

ce qui termine la démonstration.

Ce résultat est parfois attribué à René Descartes (1596–1650), en lien avec la discussion des polynômes qu'il présente dans *La géométrie* (1637), traité publié en appendice à son cé-

6. *L'expression « X mesure Y » chez Euclide, s'agissant de nombres, signifie ce que nous désignons maintenant par « X est un diviseur de Y » : le nombre X est contenu dans Y un nombre exact (entier) de fois, c'est-à-dire Y est de la forme Y = kX, avec k un entier (positif).*

7. *Traduction et commentaires par Bernard Vitrac, volume II, Presses Universitaires de France, 1994.*

lèbre *Discours de la méthode*. Le résultat, qui ne figure pas explicitement dans ce traité, est un classique de la théorie élémentaire des polynômes, quand vient le temps de déterminer si un polynôme donné (à coefficients entiers) a des racines dans $\mathbb{Q}$. À noter que le théorème ne formule pas une condition suffisante pour l'existence de racines rationnelles, car les rationnels qui satisfont à la conclusion du théorème ne sont pas tous racines du polynôme P donné — de fait, P pourrait fort bien n'avoir aucune racine rationnelle; il s'agit plutôt d'une condition à laquelle doivent nécessairement satisfaire de telles racines rationnelles (exprimées sous forme irréductible), lorsqu'elles existent. La recherche de racines rationnelles du polynôme P est ainsi ramenée à l'examen d'un nombre fini de cas, les coefficients a_0 et a_n ayant forcément un nombre fini de diviseurs.

Par exemple, s'agissant du polynôme :

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$$

et considérant les facteurs de 2 (1, 2, –1, –2) et ceux de 3 (1, 3, –1, –3), on voit que huit rationnels sont candidats en tant que racines de P :

$$1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2};$$

et parmi eux, un seul annule le polynôme :

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 0.$$

Revenant maintenant à l'irrationalité de $\sqrt{2}$, considérons le polynôme $P(x) = x^2 - 2$, ayant justement pour racine $\sqrt{2}$. Si cette racine était rationnelle, elle serait donc, en vertu du théorème, de la forme a/b avec a un diviseur de 2 et b un diviseur de 1. Il en résulte donc quatre cas à inspecter (1, –1, 2, –2), mais aucun de ceux-ci n'annule $x^2 - 2$. Le polynôme $P(x) = x^2 - 2$ n'a donc pas de racine rationnelle, de sorte que sa racine $\sqrt{2}$ est forcément un nombre irrationnel.

Note 10 :

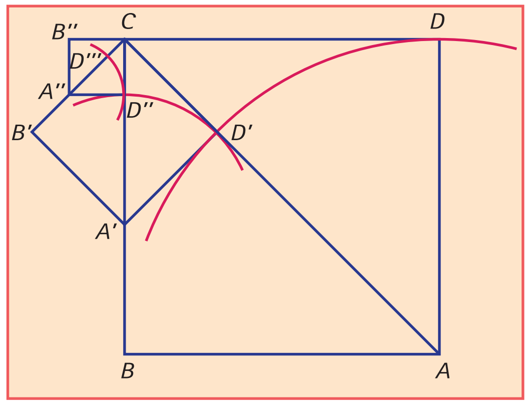
Le théorème sur lequel on s'est ici appuyé peut servir à établir d'autres types de résultats d'irrationnalité. Voici par exemple comment montrer que le réel $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un irrationnel.

Observons tout d'abord que u est une racine du polynôme $Q(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. En effet, comme $u^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, on voit que $u^2 - 5 = 2\sqrt{6}$, et donc, en élevant au carré,

$$u^4 - 10u^2 + 25 = 24.$$

Pour que u soit un rationnel, il faudrait alors, en vertu du théorème, qu'il soit de la forme $u = p/q$ avec p et q tous deux des diviseurs de 1, le coefficient du terme de plus haut degré et le terme constant de Q. Or comme ni $Q(1)$ ni $Q(-1)$ n'est nul, la racine u de Q est donc irrationnelle.

3.



a) AC étant la diagonale du carré $ABCD$, l'angle $\angle ACB$ vaut donc 45°, de sorte que le triangle rectangle $A'CD'$ est isocèle.

b) Voyant le triangle $A'CD'$ comme un demi-carré, soit le point B' tel que $A'B'CD'$ forme un carré et reprenons le même processus : on détermine ainsi sur la diagonale $A'C$ de ce carré un point D'' tel que $A'D'' \cong A'B'$. Traçant alors $A''D''$ perpendiculaire à $A'C$, avec A'' sur $B'C$, il en résulte un nouveau carré $A''B''CD''$. Cette construction peut être répétée indéfiniment, donnant à chaque fois, sur la diagonale de chacun des carrés successifs, une longueur pouvant être utilisée comme côté du carré suivant. Lors de ce processus, les côtés de ces carrés deviennent de plus en plus petits, mais sans jamais devenir nuls :

$$CD > CD' > CD'' > CD''' > \cdots$$

c) **1re preuve :**

La congruence $A'B \cong A'D'$ découle immédiatement de la congruence des deux triangles ABA' et $AD'A'$ (cas de congruence de triangles rectangles).

(Ce raisonnement est parfois traduit en termes de tangentes à un cercle : le cercle de centre A et de rayon AD passant bien sûr par le point B, les segments $A'B$ et $A'D'$ sont donc congruents comme tangentes à ce cercle issues du point A'.)

2e preuve :

Observons que par construction le triangle BAD' est isocèle. Par conséquent deux des angles du triangle $BA'D'$ sont congruents — ces angles étant les compléments de deux angles eux-mêmes congruents — de sorte que ce dernier triangle est lui aussi isocèle, avec $A'B \cong A'D'$.

Notons qu'on démontrerait de même que $A''B' \cong A''D''$, etc.

Observons de plus au passage un fait qui nous servira à la partie (d) : comme le quadrilatère $A'B'CD'$ est un carré, le segment $A'B$ est donc congruent à chacun de ses côtés.

d) Prenant appui sur cette construction géométrique, supposons maintenant que la diagonale et le côté du carré initial sont commensurables[8], c'est-à-dire qu'ils ont une « mesure commune ». En d'autres termes, nous supposons qu'il existe un certain « segment-unité » commun[9] à ces deux segments et compris un nombre (entier !) exact de fois dans chacun d'eux.

Pour simplifier la notation, appelons

- d la longueur de la diagonale AC,
- c la longueur du côté CD, et
- u la longueur du segment-unité commun dont on suppose l'existence.

L'hypothèse de commensurabilité de la diagonale et du côté du carré $ABCD$ nous assure donc de l'existence de deux entiers (positifs) m et n tels que :

$$d = m \times u \text{ et } c = n \times u.$$

Par construction $CD' = AC - CD$, de sorte que la longueur de CD' est donnée par :

$$d - c = (m - n) \times u.$$

Or $m - n$ étant un entier positif (on a bien sûr ici $m > n$), on voit que la longueur du côté du carré $A'B'CD'$ est elle aussi un multiple de u. Dit autrement, le côté du carré $A'B'CD'$ est commensurable avec le côté et la diagonale du carré initial (toujours selon le même segment-unité de longueur u).

Qu'en est-il maintenant de la diagonale $A'C$ du carré $A'B'CD'$? Pas de souci : on peut montrer qu'elle est elle aussi commensurable avec les autres segments dont il a été fait mention jusqu'ici ! En effet, de $A'C = BC - A'B$ et de $A'B \cong CD'$ — voir partie (c) — suit que la longueur de $A'C$ est donnée par :

$$n \times u - (m - n) \times u = (2n - m) \times u.$$

(Observons qu'il est clair, en vertu de la géométrie du problème, que $2n > m$, de sorte qu'il s'agit encore ici d'un multiple (positif) de la longueur du segment-unité en cause.)

Bref, posant $m' = 2n - m$ et $n' = m - n$, le carré $A'B'CD'$ est donc tel que sa diagonale est de longueur $m' \times u$ et son côté, de longueur $n' \times u$, où m' et n' sont deux entiers positifs et u, la longueur du segment-unité servant de commune mesure. Notons de plus que nous avons les deux inégalités :

$$m > m' \text{ et } n > n'.$$

En effet, dans le premier cas, on a

$$m = 2m - m > 2n - m = m',$$

et dans l'autre,

$$n = 2n - n > m - n = n'.$$

(Nous avons utilisé ici les deux inégalités déjà mentionnées, $m > n$ et $2n > m$.)

e) Résumons. Partant d'un carré $ABCD$ dont on a supposé que la diagonale et le côté sont commensurables, on a trouvé un carré plus petit $A'B'CD'$ lui aussi de diagonale et de côté commensurables, les segments $A'C$ et CD' étant des multiples du même segment unité servant à engendrer AC et CD. Plus précisément, appelant m et n les entiers témoignant de la commensurabilité supposée

8. *Du latin* commensurabilis, *de* cum, *« avec » et* mensura, *« mesure ». Deux grandeurs commensurables ont donc une « commune mesure » : il existe alors une unité permettant de les « mesurer » toutes deux, c'est-à-dire de les exprimer par des nombres entiers en fonction de cette unité de mesure. Le mot* incommensurable *s'applique à des grandeurs qui ne peuvent se comparer par manque de mesure commune. Par extension, le mot incommensurable en est venu à désigner dans le langage courant ce qui est très grand, trop grand pour être mesuré, donc démesuré — ce qui est bien sûr un faux sens, mathématiquement parlant.*

9. *On aurait volontiers parlé, dans un langage d'il y a quelques siècles, de* partie aliquote *commune. Le mot* aliquote *est tiré du latin médiéval* aliquotus, *de* alius, *« autre » et* quotus, *« en quel nombre » (cf notre mot* quote-part*). Une partie aliquote d'un tout y est contenue un nombre exact de fois. Son antonyme est* partie aliquante, *qui n'est pas contenue un nombre exact de fois dans le tout en question — latin médiéval* aliquantus, *de* quantus, *« combien grand ». Les expressions* aliquote *et* aliquante *sont aujourd'hui tombées en désuétude.*

de la diagonale et du côté du premier carré, nous sommes passés à des entiers respectivement inférieurs, m' et n', jouant le même rôle dans le carré $A'B'CD'$. Il va de soi que cette observation vaudrait aussi pour tous les carrés successifs, de plus en plus petits, qu'introduit la construction géométrique précédente.

Nous proposons maintenant deux façons de conclure l'argument.

Variante 1 :

Nous sommes ainsi en présence d'une famille infinie de carrés de plus en plus petits, dont les côtés et diagonales sont tous des multiples d'un même segment-unité (de longueur finie et déterminée), ce qui est absurde. On en conclut que la diagonale et le côté du carré initial sont incommensurables.

Variante 2 :

Nous reprenons le raisonnement en mettant cette fois en évidence une suite décroissante de nombres naturels. Tel qu'observé plus haut, nous sommes en présence d'une famille de carrés de plus en plus petits et de côté respectifs

$$CD > CD' > CD'' > CD''' > \cdots,$$

chacun étant multiple d'un même segment de longueur u :

$$n \times u > n' \times u > n'' \times u > n''' \times u > \cdots.$$

On en extrait la suite d'entiers

$$n > n' > n'' > n''' > \cdots$$

qui serait donc une suite infinie décroissante de naturels, ce qui est absurde ! Cette CONTRADICTION nous amène à abandonner l'hypothèse voulant que la diagonale et le côté du carré *ABCD* étaient commensurables.

On vient donc d'établir le résultat suivant:

dans tout carré, la diagonale et le côté sont incommensurables.

Application à l'irrationnalité de $\sqrt{2}$:

Considérons un carré de côté 1 et, donc, de diagonale $\sqrt{2}$. La diagonale et le côté de ce carré étant incommensurables, il n'existe donc pas de nombre (réel) u tel que $\sqrt{2} = m \times u$ et $1 = n \times u$, avec m et n des naturels.

Autrement dit, le rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{1}$ n'est pas de la forme $\dfrac{m \times u}{n \times u} = \dfrac{m}{n}$.

Bref, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Note 11 :

La démonstration du #3 est à maints égards dans l'esprit des Grecs de l'Antiquité : elle s'appuie sur une construction géométrique élémentaire, elle est exprimée en termes d'incommensurabilité (comme chez Aristote), elle fait intervenir un argument par descente infinie familier à Euclide (voir la note 9 plus haut). Mais elle ne se retrouve néanmoins pas telle quelle dans les textes anciens. Elle est présentée dans un manuel de mathématiques du 19e siècle — le célèbre *Algebra*: *An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges* (1886), du mathématicien écossais George Chrystal (1851-1911) (partie 1, Chelsea Publishing Co., 1964, p. 270). Elle se figure aussi dans *Plaisir des mathématiques* de Hans Rademacher et Otto Toeplitz (Dunod, 1967, p. 21).

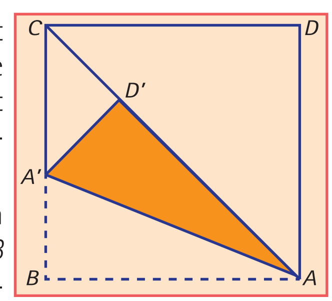
Note 12 :

Voici de manière plus précise comment Aristote s'exprime à propos du thème à la base de cette série d'exercices :

> *On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable. (Les Premiers Analytiques,* I.23*)*

Tout est dit!

Note 13 :



La construction du carré $A'B'CD'$ peut s'interpréter en termes de pliage de feuille de papier (voir John H. Conway et Richard K. Guy, *The Book of Numbers*, Copernicus (Springer), 1996, p. 183).

Partant du carré *ABCD*, effectuons un pli de manière à superposer le côté *AB* sur la diagonale *AC*. Le point *B* détermine ainsi un point D' sur *AC* tel que AD' est congruent au côté du carré. Il appert de l'acte même du pliage que $A'B \cong A'D'$, donnant ainsi directement accès au résultat de la partie (c). On observe aussi que $AD'A'$ est un triangle rectangle, par construction.
