Vous ouvrez une boîte neuve et pourtant elle ne semble pas pleine. La boîte a été secouée et le contenu s'est tassé. C'est parce que la boîte n'a pas été remplie en utilisant le remplissage le plus dense. En 1998, Thomas Hales (1958 -) a montré que l'empilement de sphères le plus dense est celui qu'on observe sur les étals de fruits, prouvant ainsi la conjecture de Kepler, énoncée en 1611.

Quel est l'empilement le plus dense ?

Christiane Rousseau
Université de Montréal

Nos sphères sont en fait des boules pleines. On veut calculer la densité d'un empilement, c'est-à-dire la proportion de l'espace qui est occupé par des boules.

Le problème de déterminer la densité maximum en dimension 3 est très difficile, mais Thomas Hales explique qu'il s'est inspiré de la solution en dimension 2. Cette solution est très jolie. Nous allons la présenter et voir quelles sont les grandes idées qui en ressortent.

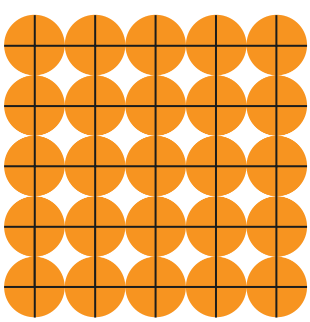
La densité d'empilements de boules en dimension 2

Une boule est maintenant un disque. On veut placer des disques de même rayon dans le plan de la manière la plus dense possible. Voici deux manières de le faire.

Quelle est la densité de notre empilement ?

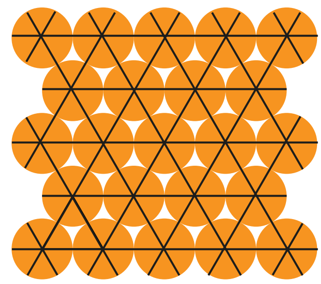
Avec la méthode ci-contre, on peut paver le plan par des carrés de côté $2r$, dont les sommets sont aux centres des disques. Chaque carré a pour aire $4r^2$. De cette aire, une proportion de πr^2 est recouverte par des disques, puisque on a quatre quarts de disque de rayon r. Donc, la densité de l'empilement est :

$$d_1 = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7854.$$



On voit que la densité est indépendante du rayon des disques. Donc, pour simplifier, on supposera par la suite que le rayon est égal à 1.

Avec la méthode en haut à droite, on peut paver le plan par des triangles équilatéraux de côté 2, de sommets aux centres des disques. Chaque triangle a pour aire, $\sqrt{3}$. De cette aire, $\pi/2$ est recouverte par des disques, puisque on a trois sixièmes de disque de rayon r. Donc, la densité de l'empilement est :



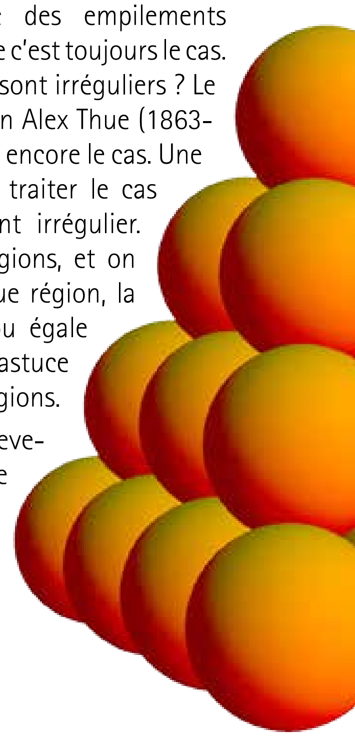
$$d_2 = \frac{\pi/2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}9069.$$

Ce calcul confirme ce que notre œil pressentait, à savoir que l'empilement de droite est plus dense que celui de gauche. Le réseau des centres de droite est appelé *réseau hexagonal*.

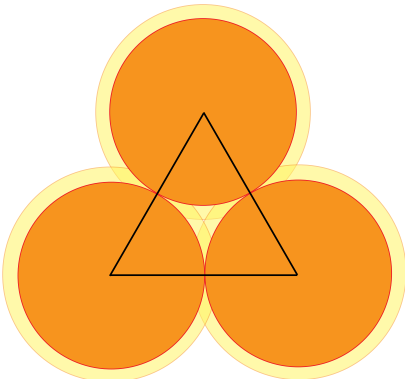
Mais est-ce vraiment l'empilement le plus dense ?

Si l'on compare avec des empilements réguliers, on trouvera que c'est toujours le cas. Mais si les empilements sont irréguliers ? Le mathématicien norvégien Alex Thue (1863-1922) a montré que c'est encore le cas. Une idée géniale permet de traiter le cas général d'un empilement irrégulier. On divise le plan en régions, et on montre que, dans chaque région, la densité est inférieure ou égale à $d_2 = \pi/2\sqrt{3}$. Toute l'astuce est de bien choisir les régions.

Pour voir comment, revenons à notre triangle de base dans lequel la densité était de d_2.



Agrandissons les disques jusqu'à remplir tout l'espace.

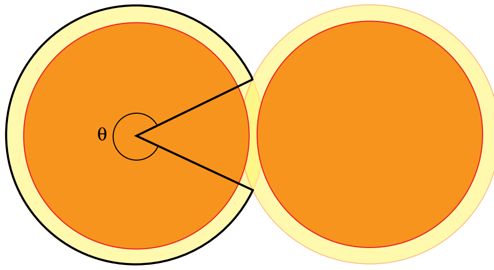


Le grand rayon est le rayon R du cercle circonscrit au triangle : il est égal aux 2/3 de la hauteur, soit $R = 2\sqrt{3}/3$. On agrandit ainsi tous les disques, que l'on va appeler des *grands disques*. On peut maintenant diviser notre plan en trois types de régions.

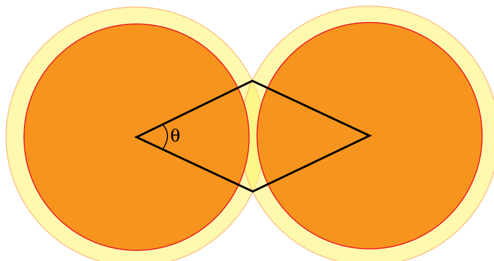
La première région est la portion du plan non couverte par un grand disque. Dans cette région, la densité est bien sûr nulle.

On s'intéresse maintenant à la portion du plan couverte par les grands disques. Chaque fois que des grands disques ont une intersection non vide, on les divise en secteurs limités par des rayons à partir des points d'intersection sur la frontière.

Le deuxième type de région est un secteur de grand disque tel qu'encerclé sur la figure :



Le troisième type de région est de la forme :



Le calcul de la densité dans les régions de deuxième et troisième type demande un peu de travail. Nous le mettons dans l'encadré.

Calcul de la densité dans les régions de deuxième et troisième type

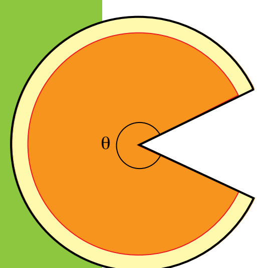
Calculer l'aire d'une région du deuxième type n'est pas difficile. L'aire d'un secteur de disque de rayon r d'ouverture θ est, par une règle de trois, $r^2\theta/2$ (où l'angle θ est en radians). Donc, la densité est :

$$\frac{\theta/2}{R^2\theta/2} = \frac{1}{R^2} = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

qui est inférieure à $d_2 \approx 0{,}9069$.

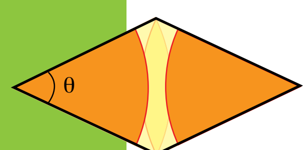
Passons maintenant à la densité dans le troisième type de région. La région couverte par les petits disques est la réunion de deux secteurs de rayon 1 et d'ouverture θ, qui a donc pour aire θ. L'aire de la région est la somme des aires de deux triangles isocèles ayant chacun deux côtés de longueur $R = 2\sqrt{3}/3$ séparés par un angle θ. Cette aire vaut donc :

$$2R^2 \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = R^2 \sin\theta = \frac{4}{3}\sin\theta.$$



La densité dépend de θ, c'est une fonction :

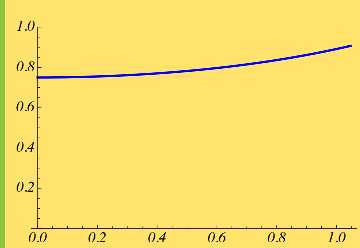
$$d(\theta) = \frac{3\theta}{4\sin\theta}.$$



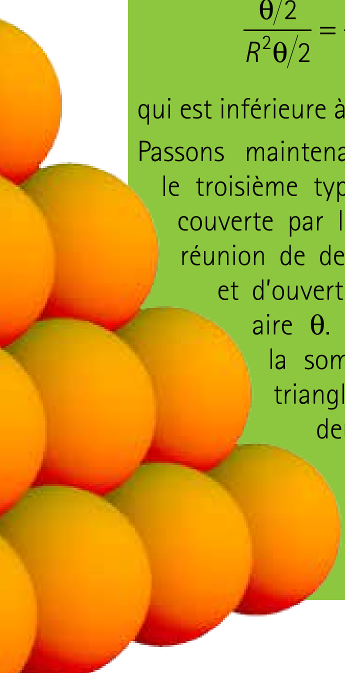
Remarquons que $\theta \in [0, \pi/3]$. On a :

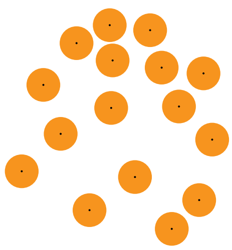
$$d(\pi/3) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

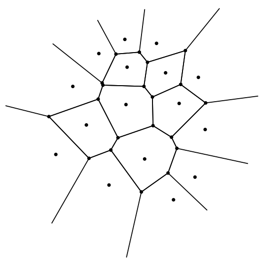
La conclusion suit si on montre que la fonction est croissante sur l'intervalle $[0, \pi/3]$. Cela peut se montrer rigoureusement, mais nous nous contenterons de le voir sur le graphe de la fonction $d(\theta)$.

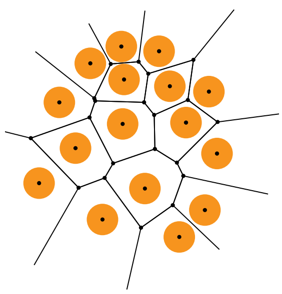


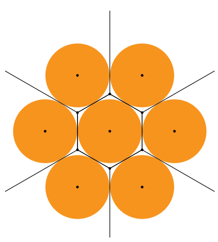
$d(\theta) = \dfrac{3\theta}{4\sin\theta}$, croissante sur $[0; \pi/3]$











Passer aux grandes idées de la dimension 3

En fait, il est un peu tôt. Il faut encore digérer les leçons de la dimension 2.

Regardons un empilement irrégulier sur lequel nous avons marqué les centres des disques. Faisons une partition du plan en cellules attachées à ces centres, de telle sorte que chaque cellule contienne exactement les points du plan qui sont plus proches du centre de son disque que du centre des autres disques.

Cette partition du plan s'appelle le *diagramme de Voronoï*[1] (voir figure) de l'ensemble des centres des disques. Les frontières des cellules sont bien sûr des portions de médiatrices de segments joignant les centres deux à deux. Si la densité dans chaque cellule est la plus grande possible, alors la densité globale sera maximale.

Dans le cas de l'empilement le plus dense, la densité dans chaque cellule est exactement

$$d_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}9069\,.$$

On voit bien que, localement autour du disque central, on ne peut faire mieux que d'empiler six disques tangents à ce disque.

En dimension 2, la meilleure densité globale est déjà la meilleure densité locale.

Peut-on utiliser cette idée en dimension 3 ?

Nous verrons que la densité d'un étal d'oranges est $d_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}74048$.

Est-ce la densité de la sphère dans sa plus petite cellule de Voronoï ? Malheureusement, les choses ne sont pas aussi simples. En effet, on peut inscrire la sphère dans un dodécaèdre régulier (à douze faces), et coller douze sphères tangentes aux centres des faces du dodécaèdre. Ce dodécaèdre devient alors la cellule de Voronoï associée à la sphère centrale, pour l'ensemble des centres des 13 sphères. Dans ce dodécaèdre, la densité est égale à 0,754697, donc supérieure à d_3 ! Mais alors, pourquoi d_3 est-elle la densité maximale ? En dimension 2, la plus petite cellule de Voronoï était un hexagone régulier et on peut paver le plan avec des hexagones réguliers. Mais, on ne peut pas paver l'espace avec des dodécaèdres réguliers..., il reste du vide entre les dodécaèdres.

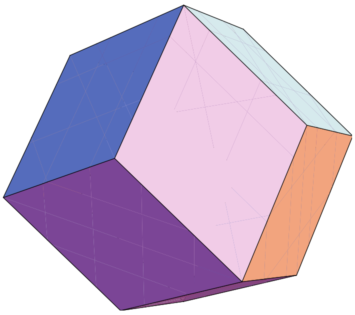
Autre problème : en dimension 2, lorsqu'on entourait un disque de six disques tangents, les six disques étaient aussi tangents entre eux. Ce n'est plus le cas en dimension 3 : les 12 sphères tangentes au dodécaèdre ne sont pas tangentes entres elles : il reste de la place. En fait, on s'est longtemps demandé si 13 sphères pouvaient être tangentes à la sphère initiale, jusqu'à ce que Thomas Hales prouve que ce ne pouvait être le cas.

Ce sont quand même des variantes de toutes ces idées qu'a utilisées Thomas Hales dans sa preuve du fait que d_3 est la densité maximale d'un empilement de sphères. Il a partitionné l'espace en régions et montré que, dans chaque type de région, la densité est inférieure ou égale à d_3. Mais, le nombre de types de régions est énorme et il faut un ordinateur pour traiter tous les cas. Le code du programme est public pour ceux qui veulent vérifier la preuve.

La géométrie de l'empilement des étals d'oranges

Elle est très intéressante. Cet empilement est périodique. Donc, toutes les cellules du diagramme de Voronoï[2] de l'ensemble des centres des sphères sont identiques. Ce sont des dodécaèdres rhombiques, à 12 faces identiques en forme de losange.

1. *Gueorgui Voronoï (1868-1908))*



Les dodécaèdres rhombiques, eux, peuvent paver l'espace. Donc la densité des étals d'oranges est la même que celle d'une sphère inscrite dans une cellule de Voronoï en forme de dodécaèdre rhombique.

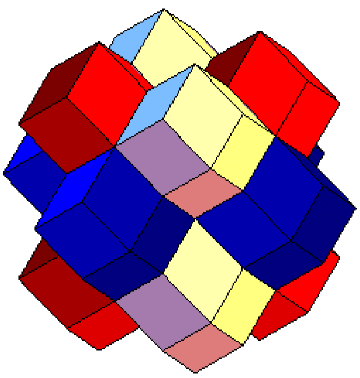
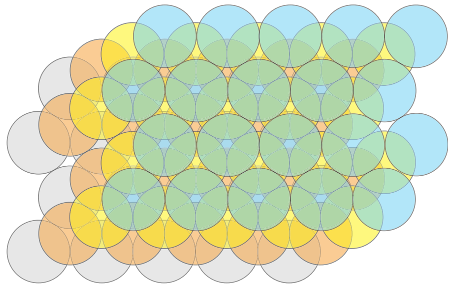


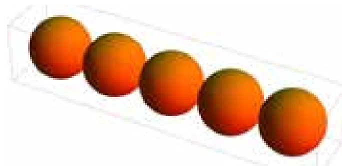
Image prise à https://www.mathcurve.com/polyedres/pavage/dodecrhomb-pavage2.gif

Nous allons vérifier que la densité des étals d'oranges est bien d_3. Calculer le volume d'un dodécaèdre rhombique et de la sphère inscrite est difficile. Il existe des méthodes plus simples. En voici une. Prenons une grande boîte cubique $N \times N \times N$ et remplissons-le de sphères de rayon 1, comme sur les étals d'oranges.

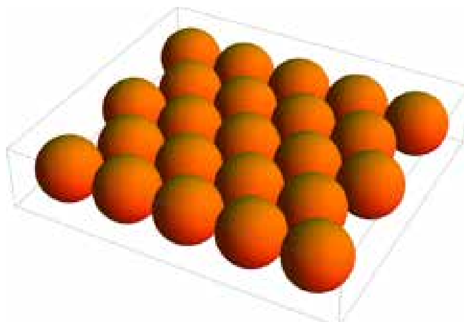
2. *Le diagramme de Voronoï dans l'espace se définit de la même manière que dans le plan.*



Prenons une des couches horizontales. On a donc environ *N/2* sphères sur chaque longueur.



Deux rangées sont espacées d'une distance de $\sqrt{3}$. Par là, on entend la distance entre les lignes de centres de deux rangées consécutives. Donc on a environ $N/\sqrt{3}$ rangées. Ceci donne environ $N^2/2\sqrt{3}$ sphères par couche horizontale.



La distance verticale entre les centres de deux couches est la hauteur d'un tétraèdre régulier d'arête 2, soit égale à $2\sqrt{2/3}$: (exercice). Donc, on a environ $N/2\sqrt{2/3}$ couches. Par suite, la boîte contient au total environ $N^3/4\sqrt{2}$ sphères, et chacune a un volume de $4\pi/3$. Le volume rempli par les sphères est donc approximativement $N^3\pi/3\sqrt{2}$. Comme le volume de la boîte est N^3, la densité est :

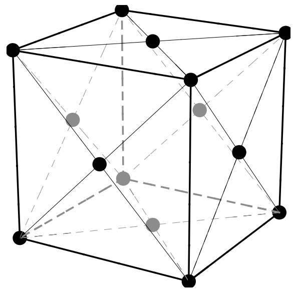
$$d_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0{,}74048.$$

Notre calcul n'est pas exact près des bords, mais il le devient si on fait tendre N vers l'infini.

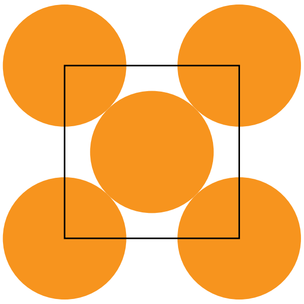
On peut remarquer qu'il y a plusieurs manières d'empiler les couches dans la figure. En effet, autour de chaque orange, il y a six creux, mais seulement trois (un sur deux) seront occupés par des oranges à la couche suivante. Donc, selon la manière dont on empile les couches, on peut facilement obtenir des empilements non symétriques. La solution à densité maximale n'est pas unique en dimension 3 !

Le réseau des centres des sphères dans l'empilement des étals d'oranges

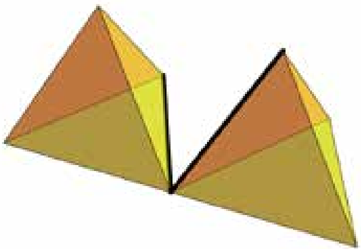
Ce réseau est bien connu en cristallographie : c'est le réseau cubique à faces centrées,[3]



et voici une coupe le long d'une face.



On voit qu'on a des alignements de centres sur des lignes orthogonales, ce qui n'est pas évident quand on regarde un étal d'oranges ! Ces lignes existent : regardez ces deux tétraèdres de base horizontale, dont les sommets sont des centres de sphères. Un calcul vous montrera que les deux arêtes noires sont orthogonales.



Connaître cette disposition nous donne une deuxième manière de calculer la densité d_3. Prenons des cubes de côté 1 qui remplissent l'espace. Alors, les sphères centrées sur le réseau cubique à faces centrées correspondant ont pour rayon $\sqrt{2}/4$. Calculons la proportion du volume du cube occupée par des sphères. Centrée à chacun des huit sommets, on a un huitième de sphère à l'intérieur du cube : au total, cela nous donne le volume d'une sphère. On a une demi-sphère à l'intérieur du cube pour chacune des six faces, pour un volume total de trois sphères. Donc, le volume du cube occupé par des sphères est le volume de quatre sphères, soit :

$$4 \times \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}},$$

et on retrouve bien la densité d_3.

Une application aux codes correcteurs d'erreurs

Le principe d'un code correcteur d'erreurs est d'encoder des lettres par des suites de symboles appelées *mots*, qui diffèrent d'au moins $2r$ symboles. Alors, si moins de r erreurs se sont produites dans la transmission du code, il existe au plus un mot de code à une distance inférieure à r du mot reçu. Si un tel mot de code existe, la correction est possible. Dans les codes correcteurs d'erreurs utilisant les empilements de sphères, les mots du code sont les coordonnées des centres des sphères de l'empilement. Si les sphères ont rayon r, il est possible de corriger jusqu'à $r - 1$ erreurs.

---

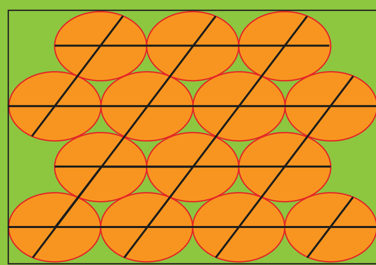
3. *Voir* Accromath *« Savez-vous empiler des oranges ? », volume 3.1, 2008 et « Cristaux », volume 9.2, 2014.*

Et si on range nos oranges au hasard dans la boîte ?

On a vu que si on place nos oranges très soigneusement, alors on a une densité proche de d_3. Mais, si on est peu soigneux et qu'on les lance dans la boîte, alors la densité est moins élevée. Le problème a aussi été étudié à l'aide de simulations et montre qu'on obtient une densité d entre 55% et 63,4%, selon qu'on est pas du tout soigneux ou un peu soigneux. Ceci signifie que le contenu d'une boîte remplie de cette manière peut se tasser lorsqu'on secoue la boîte. On imagine bien que ces problèmes sont importants pour les manufacturiers qui empaquettent des objets comme des bonbons, des pilules, etc.

On peut ranger d'autres objets que des sphères

Bien sûr, on peut considérer le problème de l'empilement le plus dense pour d'autres objets que des sphères, par exemple des ellipsoïdes. Dans la *Section problèmes* vous étudierez la densité de l'empilement d'ellipses suivant.



Un mot sur les dimensions supérieures

Trouver la densité maximale en dimension 3 est si difficile qu'on pourrait penser illusoire de la déterminer en dimension n. Si d_n est cette densité maximale, on a cependant beaucoup de résultats du genre $d_n > C$. Pour obtenir un tel résultat il suffit en effet de construire un empilement de densité égal à C. Rappelez-vous comment on a construit les meilleurs empilements. En dimension 1, on a aligné des segments : on les remplace par un alignement de sphères tangentes pour se donner une rangée d'oranges. En dimension 2, on a pris des rangées de disques tangents et on les a alignées l'une à côté de l'autre de la manière la plus compacte possible : on peut remplacer ces disques par des sphères pour se donner une couche d'oranges. En dimension 3, on a pris des couches de dimension 2 et on les a mises l'une sur l'autre de la manière la plus compacte possible. En itérant le processus, ceci nous permet de construire des empilements compacts en toute dimension.

La surprise est qu'il existe des preuves que cette construction donne la densité maximale en dimension 8 :

$$d_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0,2566$$

et en dimension 24 :

$$d_{24} = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0,001\,929\,57.$$

Ce sont deux beaux résultats de Maryna Viazovska (1984-) obtenus en 2016. Les réseaux des centres sont le réseau E_8 pour la dimension 8, et le réseau de Leech pour la dimension 24. Ces réseaux qui ont énormément de symétries sont très étudiés par les mathématiciens. Nous avions remarqué en dimension 3 que l'empilement le plus dense n'est pas unique. Par contre, il est unique en dimensions 8 et 24. Dans sa preuve, Maryna Viazovska a utilisé les formes modulaires, un outil d'analyse complexe couramment utilisé en théorie des nombres.