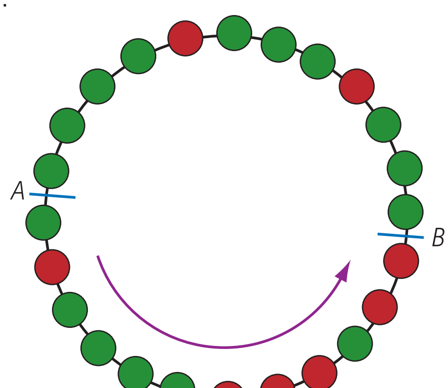
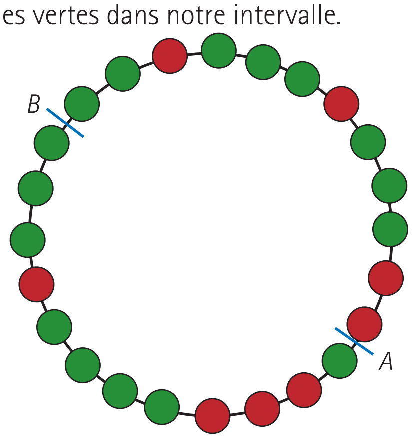
# Été-automne 2017 Solutions

### Partage discret du collier.

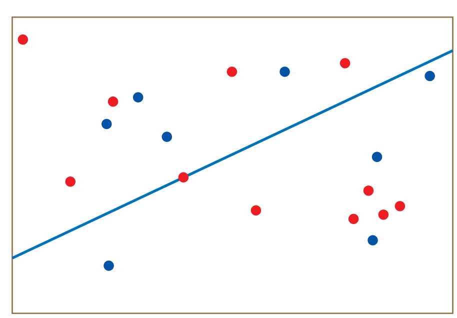
1. Considérons un intervalle contenant $a+b$ perles :



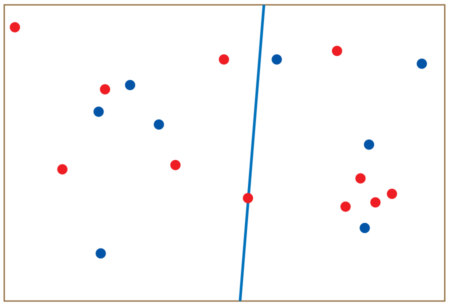

Si cet intervalle contient plus de $a$ perles rouges, décalons le d'une perle dans le sens positif. S'il contient encore plus de $a$ perles rouges, décalons le encore d'une perle dans le sens positif. Etc. À chaque étape le nombre de perles rouges soit reste le même, ou augmente de 1, ou diminue de 1. Si on avait décalé de $a+b$ perles, alors on se serait retrouvé avec le complémentaire de notre intervalle initial qui a moins de perles rouges que de perles vertes. Donc, entre la position initiale et cette position finale de l'intervalle on est nécessairement passé par une situation pour laquelle on a $a$ perles rouges et $b$ perles vertes dans notre intervalle.

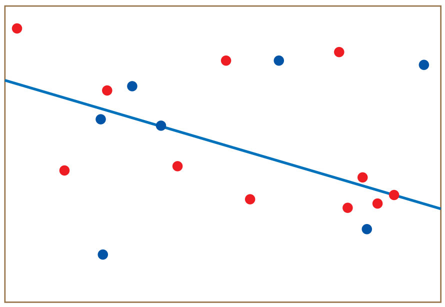



2. Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$ la longitude d'un point sur l'équateur, et $T(\theta)$ la température au point de longitude $\theta$, qui est une fonction continue satisfaisant $T(-\pi)=T(\pi)$. On pose $f(\theta)=T(\theta+\pi)-T(\theta)$ pour $\theta \in [-\pi, 0]$. La fonction $f$ est continue.
   Deux points antipodaux de longitude $\theta$ et $\theta+\pi$ ont même température si et seulement si $f(\theta)=0$.
   Si $f(-\pi)=0$, alors deux points antipodaux de même température sont ceux de longitude 0 et $\pi$.
   Si $f(-\pi)>0$, alors :
   $$f(0)=T(\pi)-T(0)=T(-\pi)-T(0)=-f(-\pi)<0.$$
   Par le théorème de la valeur intermédiaire il existe $\theta \in [-\pi, 0]$ tel que $f(\theta)=0$.
   Si $f(-\pi)<0$, alors $f(0)>0$, et on conclut de la même manière.
3. La solution est la même que pour la danoise aux fruits. Pour cette dernière on n'avait pas besoin que la brioche et les fruits soient d'un seul morceau. L'équivalent de la brioche est l'ensemble des points bleus et l'équivalent des fruits l'ensemble des points rouges.



La solution d'un problème de partage n'est pas nécessairement unique.





## Analyse dimensionnelle

1. Nous utilisons les unités suivantes pour les quantités du problème:
   $T$ en secondes (s), h en mètres (m),
   $M$ en kilogrammes (kg),
   $v_0$ en mètres par seconde (m/s) et
   $g$ en mètres par secondes au carré (m/s$^2$).
   Puisque nous avons trois dimensions, nous allons choisir trois quantités primaires: $W_1 = M$, $W_2 = v_0$ et $W_3 = g$. Nous allons poser $u = T$ et $S_1 = h$ comme quantité secondaire.
   On écrit
   $$u = f(W_1;W_2;W_3;S_1),$$
   où $f$ est une fonction inconnue.

On obtient la première quantité sans dimension avec $u$, en utilisant l'équation

$$s = \mathrm{kg}^{\alpha}\,(\mathrm{m/s})^{\beta}\,(\mathrm{m/s}^2)^{\psi}$$

qui implique le système d'équations :

$$\alpha = 0$$
$$\beta + \gamma = 0$$
$$-\beta - 2\gamma = 1$$

avec comme solution $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$.

Nous avons donc la quantité sans dimensions

$$\Pi_1 = T/(v_0/g) = gT/v$$

Pour la quantité secondaire $S_1$ nous avons :

$$m = \mathrm{kg}^{\alpha}\,(\mathrm{m/s})^{\beta}\,(\mathrm{m/s\hat{\ }2})^{\gamma}$$

qui implique le système

$$\alpha = 0$$
$$\beta + \gamma = 1$$
$$-\beta - 2\gamma = 0$$

avec comme solution $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$

Nous avons la quantité secondaire

$$\Pi_2 = h/(v_0^{\,2}/g) = gh/v_0^{\,2}.$$

Par le théorème de Vaschy-Buckingham, ceci nous donne la relation :

$$\Pi_1 = f(\Pi_2)$$

qui s'écrit alors :

$$T = (v_0/g)\ f(gh/v_0^{\,2}).$$

On voit entre autre que $T$ ne dépend pas de la masse $M$.