Partage équitable

Vous avez acheté un pain tressé de fantaisie, du jambon et du fromage, et dans la confection de votre sandwich, vous vous êtes amusé à faire une section avec plus de jambon et une autre avec plus de fromage. Votre ami arrive au moment du repas, et il vous faut partager le sandwich... Dans le passé, vous avez vaguement entendu parler du théorème du sandwich au jambon de Stone-Tukey : celui-ci affirme qu'en un seul coup de couteau vous pouvez partager en parts égales le pain, le jambon et le fromage. Mais comment donner ce coup de couteau ?

Christiane Rousseau
Université de Montréal

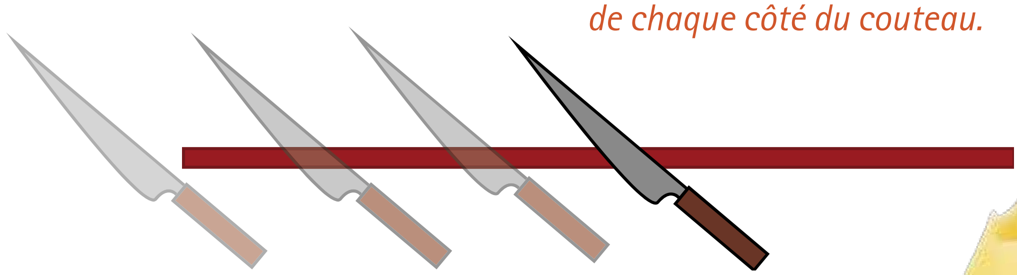
Comment partager en un seul coup de couteau un sandwich jambon-fromage de telle sorte que chaque moitié contienne des volumes égaux de pain, de jambon et de fromage ? Et pourrait-on faire la même chose si le sandwich contenait également de la moutarde ? Pour y répondre, on va commencer par un problème plus facile.

Partager un bâton de réglisse

Vous avez un bâton de réglisse que vous voulez couper en deux. Si vous placez le couteau du côté gauche, alors tout le bâton est à droite. Vous déplacez alors le couteau vers la droite jusqu'à ce que vous ayez la même quantité de réglisse à gauche et à droite.

Remarquez que si vous aviez initialement placé le couteau du côté droit, alors tout le bâton aurait été à gauche et vous auriez alors déplacé le couteau vers la gauche. Aussi, lorsque vous déplacez lentement le couteau parallèlement à lui-même, la quantité de réglisse de chaque côté du couteau varie continûment.

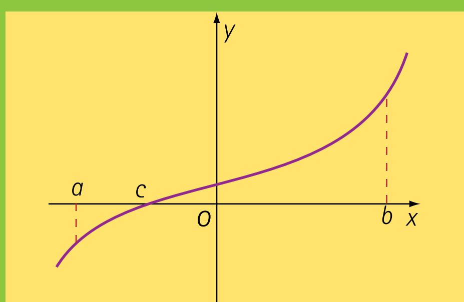
Puisque aux deux positions extrêmes on a plus de réglisse à gauche ou plus de réglisse à droite, on doit avoir une position entre les deux pour laquelle on a des quantités égales de réglisse de chaque côté du couteau.



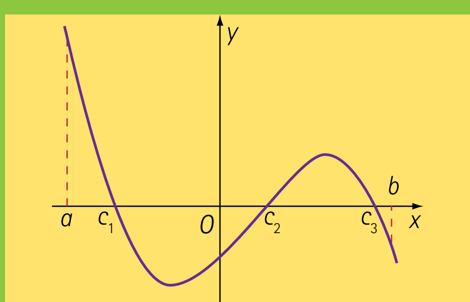
Cette idée est plus profonde qu'il n'y paraît et nous allons l'utiliser à répétition. Remarquons que c'est une application du *théorème de la valeur intermédiaire* (voir encadré ci-dessous). Essayons de l'exploiter. Si au lieu d'un bâton de réglisse, vous aviez eu un bonhomme en pain d'épices, vous auriez pu faire la même chose. Et vous auriez pu le faire quelle que soit la direction du couteau que vous auriez utilisé dans le plan !

Théorème de la valeur intermédiaire

On considère une fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, telle que $f(a)<0$ et $f(b)>0$. Alors, il existe $c\in]a, b[$ tel que $f(c)=0$.

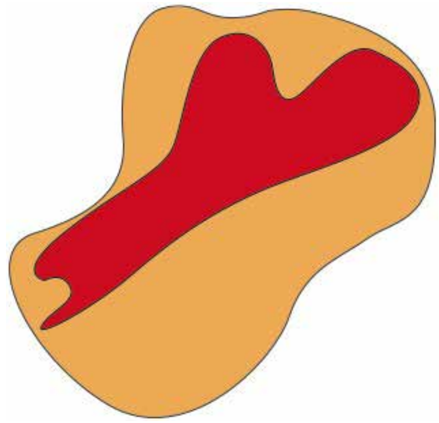


Remarquez que le résultat aurait encore été vrai si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. De plus, la racine c pourrait ne pas être unique.

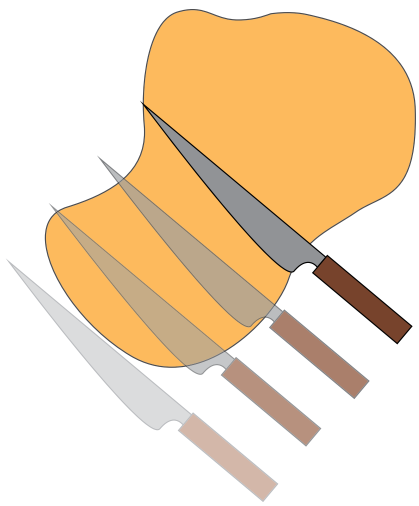


Partager une danoise aux fruits

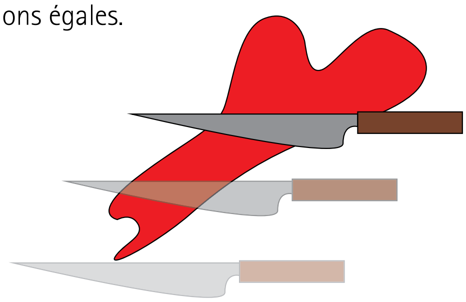
Ici, vous avez deux ingrédients : la brioche et les fruits.



Si vous choisissez une direction de couteau, vous pouvez le déplacer parallèlement à lui-même afin de couper la brioche en deux parties de même volume.

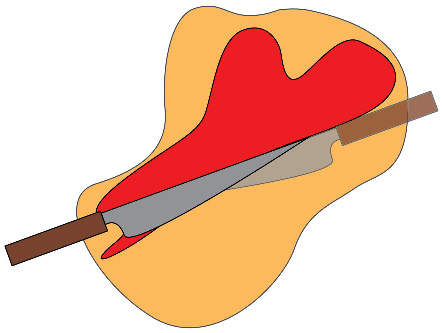


De même, vous pouvez, parallèlement à n'importe quelle direction, trouver une position du couteau qui sépare les fruits en deux portions égales.

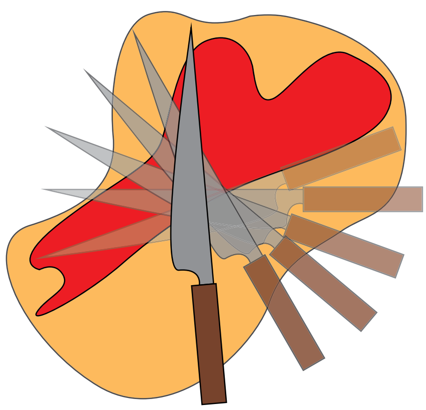


Mais pouvez-vous faire les deux à la fois ?

L'idée va être encore d'utiliser le théorème de la valeur intermédiaire. On va faire tourner notre couteau d'un demi-tour. Pour chaque angle qu'on lui donne, on le place de telle sorte qu'il coupe la brioche en deux. Il faut se convaincre qu'on peut le faire en l'animant d'un mouvement continu. À l'angle de départ, supposons qu'on ait plus de fruits du côté gauche de la lame. Lorsqu'on l'aura tourné de 180°, on aura la même coupe de la brioche, mais on aura maintenant plus de fruits du côté droit.



Et voici notre mouvement continu du couteau.



Si $\alpha \in [0, 180]$ est l'angle du couteau avec la position initiale, et $f(\alpha)$ représente la quantité de fruits à gauche moins la quantité de fruits à droite lorsque le couteau a l'angle α, alors on a $f(0) > 0$ et $f(180) < 0$. Donc, par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $\alpha \in [0, 180]$ tel que $f(\alpha) = 0$. C'est l'angle cherché pour notre couteau.

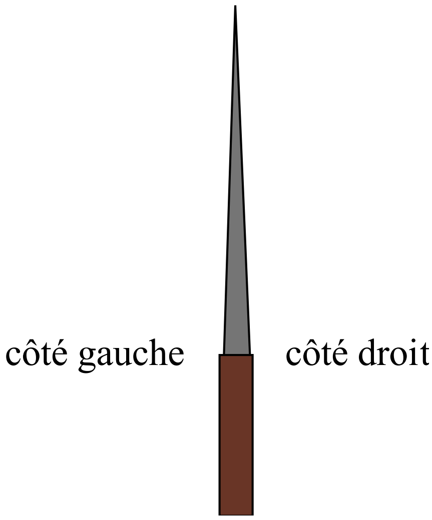
La deuxième leçon

Lorsque nous avons voulu couper notre réglisse (**un** ingrédient) nous avons utilisé des translations de notre couteau (**un** type de mouvement de notre couteau) et le théorème de la valeur intermédiaire. Lorsque nous avons voulu couper notre danoise (**deux** ingrédients), nous avons utilisé des translations et des rotations de notre couteau (**deux** types de mouvements). C'est maintenant le moment de revenir à notre sandwich au jambon : il a **trois** ingrédients, il nous faudra donc **trois** types de mouvements de notre couteau. Le troisième mouvement est celui de pencher le couteau au lieu de le tenir dans un plan vertical.

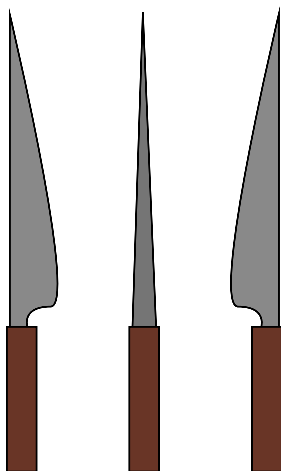
Revenons au partage de notre sandwich

Notre stratégie est la suivante : nous allons vouloir promener notre couteau de telle sorte qu'en chaque position il coupe en deux volumes égaux le pain et le jambon. Cette promenade de notre couteau correspondra à une « courbe dans l'espace ». Et nous allons utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour la quantité de fromage : à une extrémité de la courbe il y aura plus de fromage du côté gauche du couteau, et à l'autre, plus de fromage du côté droit.

Pour cela, il nous faut définir le *côté gauche du couteau*. Posons le sur une table dans un plan vertical, avec la lame horizontale, le côté tranchant sur la table, et la pointe en avant. Ce que nous voyons à gauche du couteau est appelé son côté gauche, et son côté droit est défini de même.



Maintenant nous allons pencher le couteau dans l'espace, mais ses côtés gauche et droit resteront les mêmes au cours du mouvement.



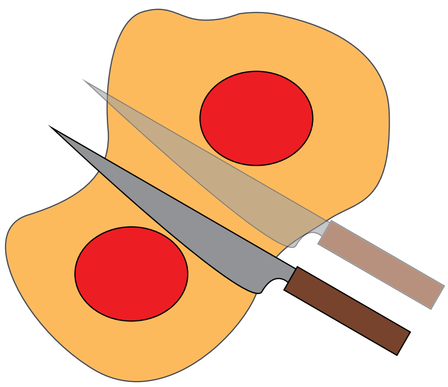
Nous avons vu que quand le couteau est dans un plan vertical, il existe une direction α du plan et un coup de couteau dans cette direction qui sépare le pain et le jambon en deux portions de mêmes volumes. Bien sûr, le fait que le couteau soit dans un plan vertical pour le couteau n'a rien de particulier. On aurait obtenu le même résultat si on avait penché notre couteau d'un angle β.

Penchons le donc lentement. Pour chaque angle β, il existe un coup de couteau avec cet angle séparant le pain et le jambon en volumes égaux. Suivons ces coups de couteau lorsque β augmente.

Supposons qu'au départ on ait plus de fromage à gauche qu'à droite du couteau. Lorsque β aura augmenté de 180°, alors notre couteau aura la même position qu'au départ sauf que son côté tranchant sera en haut. On aura donc le même trait de coupe que quand $\beta = 0$, mais on a échangé les côtés gauche et droit du couteau ! On a donc plus de fromage à droite qu'à gauche du couteau. Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un angle $\beta \in [0, 180]$ pour lequel on a autant de fromage à gauche qu'à droite.

Si vous avez trouvé que ce raisonnement n'est pas très rigoureux, vous n'avez pas tort...

Ainsi, le plan vertical dans la direction α qui coupe les fruits en deux volumes égaux n'est pas toujours unique : c'est le cas par exemple si les fruits sont en deux paquets disjoints de même volume.

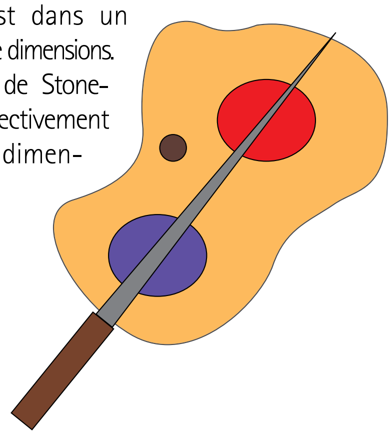


Mais rassurez-vous, il y a quand même moyen de définir des mouvements continus du couteau. Il suffit de prendre comme position du couteau la position milieu de toutes les positions possibles. Pour voir comment on peut rigoureusement écrire ces mouvements du couteau sous forme de fonction, veuillez regarder l'encadré à la page 13.

Et s'il y avait de la moutarde dans le sandwich ?

Malheureusement on n'a que trois types de mouvements dans l'espace pour notre couteau. En général il n'existe qu'un nombre fini de coups de couteau possibles qui séparent en parts égales le pain, le jambon et le fromage. Donc, on n'a presque aucune chance que ces coups de couteau séparent également la moutarde en deux. Il nous manque un quatrième type de mouvement, indépendant des trois premiers types. Il en est de même avec la danoise à droite : le seul coup de couteau qui coupe en parts égales la brioche, les framboises et les bleuets ne sépare pas en parts égales la noisette.

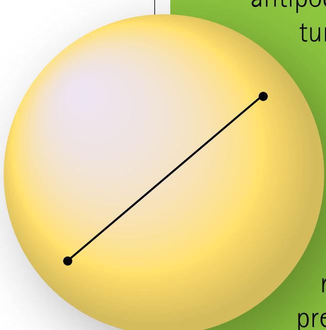
Mais vous ne serez pas surpris que le partage soit possible si le sandwich avec de la moutarde est dans un espace à quatre dimensions. Le théorème de Stone-Tukey est effectivement vrai en toute dimension $n \geq 1$.



Le théorème du sandwich, une conséquence du théorème de Borsuk-Ulam

La preuve du théorème du sandwich que nous vous avons présentée n'est pas la preuve classique. La preuve classique utilise un des grands théorèmes de la topologie algébrique, soit le *théorème de Borsuk-Ulam*.

Mesurons en chaque point de la surface de la Terre la température et la pression. Le théorème affirme qu'il existe deux points antipodaux qui ont même température et même pression.



En termes mathématiques, la surface de la terre est une sphère S et sur cette sphère on définit une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, qui à un point associe le couple donné par la température et la pression en ce point. Cette fonction $f: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue. Alors il existe $X \in S$ tel que $f(X) = f(-X)$.

Appliquons ce théorème au partage de notre sandwich : un point $X \in S$ correspond à la direction d'un vecteur $\overrightarrow{OP}$ vers le point podal du couteau (voir encadré page suivante pour la définition de point podal), le vecteur $\overrightarrow{OP}$ pointant du côté gauche du couteau vers le côté droit. On sait qu'il existe une position du couteau parallèle à ce plan coupant le pain en deux parties de même volume. Pour cette position du couteau, la fonction f associe à X le couple formé par

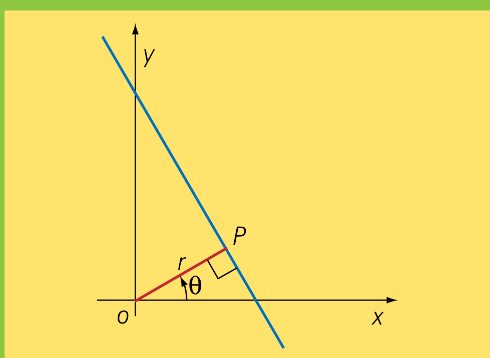
- la quantité de jambon du côté gauche
- et la quantité de fromage du côté gauche.

Si maintenant on regarde $-X$, ceci signifie qu'on a échangé les côtés gauche et droit du couteau. Ce qui est à gauche du couteau pour la position $-X$ correspond à ce qui est à droite pour la position X. Comme $f(X) = f(-X)$, ce coup de couteau qui coupait le pain en volumes égaux sépare également le jambon et le fromage en volumes égaux.

Un résultat du même type est le problème du partage discret du collier (voir problèmes).

Comment écrire sous forme de fonction les mouvements du couteau ?

Commençons par formaliser les deux mouvements de notre couteau dans le cas de la danoise. Le couteau est aligné selon une droite dans le plan. Il existe une manière standard de se donner une droite dans le plan ne passant pas par l'origine : il suffit de se donner son ***point podal***, c'est-à-dire le point de la droite qui est le plus proche de l'origine[1].

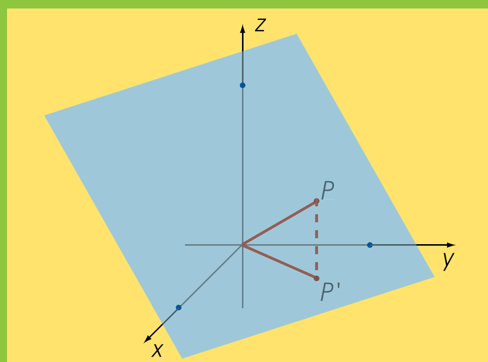


Si P est ce point, alors la droite est la perpendiculaire passant par P au vecteur $v = \overrightarrow{OP}$.

Se donner le vecteur $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, c'est se donner ses coordonnées polaires (r, θ), où $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Si nous revenons à notre danoise, pour chaque angle θ, nous avons une position du couteau perpendiculaire à la direction θ et coupant la brioche en deux. Cette position du couteau est donnée par le point podal de coordonnées polaires (r, θ) : ceci nous donne donc r comme une fonction de θ : $r = g(\theta)$ (bien sûr si la droite est unique, mais oublions cette subtilité qui peut être corrigée). Donc, quand nous bougions notre couteau continûment tout en coupant la brioche en deux, nous nous promenions sur la courbe $r = g(\theta)$.

Lorsqu'on passe au partage du sandwich, notre couteau est maintenant un plan dans l'espace. Ici encore, pour se donner un plan dans l'espace, on peut se donner son ***point podal***, soit son point le plus proche de l'origine. Soit $P = (x, y, z)$ ce point.



Il est déterminé par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ). Si P' est la projection de P dans le plan (x, y), alors θ est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP'}$ avec le demi-axe x positif. L'angle ϕ est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le plan (x, y), et $r = |\overrightarrow{OP}|$ est la distance de P à l'origine. Vous pouvez vérifier que $(x, y, z) = (r\cos\theta\cos\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\sin\phi)$.

Lorsqu'on veut couper notre sandwich, pour chaque angle ϕ que fait la normale au couteau avec le plan horizontal, nous avons une position du couteau avec cet angle, perpendiculaire à la direction d'un vecteur $(\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi)$, et coupant le pain et le fromage en deux volumes égaux. Cette position est donnée par la valeur de (r, θ) comme fonction de ϕ : $r = h(\phi)$, $\theta = k(\phi)$, ce qui décrit une courbe paramétrique dans l'espace. Donc, quand nous bougions notre couteau continûment tout en coupant à la fois le pain et le fromage en deux volumes égaux, nous nous promenions sur la courbe

$$(x(\phi), y(\phi), z(\phi)) = h(\phi)(\cos k(\phi)\cos\phi, \cos\phi\sin k(\phi), \sin\phi).$$

1. Voir aussi « Géométrie intégrale », *Accromath, hiver-printemps, 2015*