Section problèmes

Dessine-moi un graphe

1. Treize personnes sont enfermées dans 13 cellules différentes, sans aucun moyen de communication. Le geôlier leur donne une chance de quitter les lieux. Pour cela, il a préparé 13 listes de noms de prisonniers et en a donné une à chacun d'eux. À chaque prisonnier, il a tenu les mêmes propos: «Voici une liste de noms dans laquelle le vôtre n'apparaît pas. J'ai distribué une telle liste aux 12 autres prisonniers. Toutes les personnes sur votre liste ont votre nom sur la leur. Et j'ai fait en sorte que chaque paire de listes ait exactement un nom en commun. Ainsi, les listes d'Alain et Charles n'ont que le nom de Sébastien en commun. Autre exemple, les listes d'Alain et Sébastien n'ont que le nom de Richard en commun. Dans une heure, vous devrez me donner à tour de rôle un nom se trouvant sur la liste de Miguel. Si au moins l'un d'entre vous se trompe, je vous garderai tous en captivité. Sinon, vous serez tous libres. »

   Les prisonniers qui n'ont pas le nom de Miguel sur leur liste (mis à part Miguel lui-même) ne voient pas comment deviner qui s'y trouve, si ce n'est au hasard, ce qui laisse peu de chance au groupe pour recouvrer la liberté. Aussi paradoxal que cela puisse paraître, ce raisonnement est faux. Les 13 prisonniers peuvent tous donner une bonne réponse, malgré le fait qu'ils ne peuvent pas se parler. (Tuyau : en cherchant le théorème de l'amitié sur Internet, vous découvrirez une propriété des graphes qui peut vous être très utile pour résoudre ce problème.)
2. Quelle est la solution au problème des deux seaux si l'objectif n'est plus de puiser aussi peu d'eau que possible, mais de puiser de l'eau au robinet aussi peu souvent que possible ?

Nombres de Mersenne

1. a) Montrer que
   $x^k-1 = (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + ... + x + 1)$.

   b) Montrer, en utilisant cette égalité, que $2^{33} - 1$ n'est pas premier. En déterminer des facteurs.
   (Tuyau : $2^{33} = (2^3)^{11} = (2^{11})^3$.)

   c) Montrer que si le nombre de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ est premier, alors l'indice n est lui aussi premier.
2. Un nombre qui est égal à la somme de ses diviseurs propres est dit *parfait*. Ainsi, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ est parfait. La recherche de nombres parfaits est reliée à celle des nombres premiers de Mersenne.

   a) Trouver les diviseurs de $2^4 \times 31$.

   b) Étant donné un premier $p \geq 3$ et un naturel $n \geq 1$, trouver tous les diviseurs de $2^{n-1}p$.

   c) Montrer que si $M_n = 2^n-1$ est un nombre premier, alors $2^{n-1}(2^n-1)$ est parfait.

Glanures mathématico-littéraires

1. a) En vous appuyant sur la description de la facture de *Cent mille milliards de poèmes* (voir l'article d'*Accromath*, p. 28), vérifier l'exactitude numérique du titre de ce livre.

   b) Cet ouvrage de Queneau, dans sa traduction anglaise, est présenté (outre en écriture décimale) sous l'un des titres suivants : *A Hundred Thousand Billion Poems*, *One Hundred Million Million Poems* ou *One Hundred Trillion Poems*. Que dire de cette nomenclature?
2. Dans le *Mode d'emploi* de son livre, Queneau estime à près de deux cent millions d'années le temps qu'il faudrait pour faire la lecture de tous les poèmes que l'on peut produire. Comment, selon vous, l'auteur en est-il venu à cette valeur?