Jetons noirs et jetons blancs

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Les pions du jeu d'Othello sont au nombre de 64 et possèdent chacun une face blanche et une face noire. On les étale devant le Grand logicien fou en les disposant de telle sorte que 10 pions montrent leur côté blanc, et 54 leur côté noir.

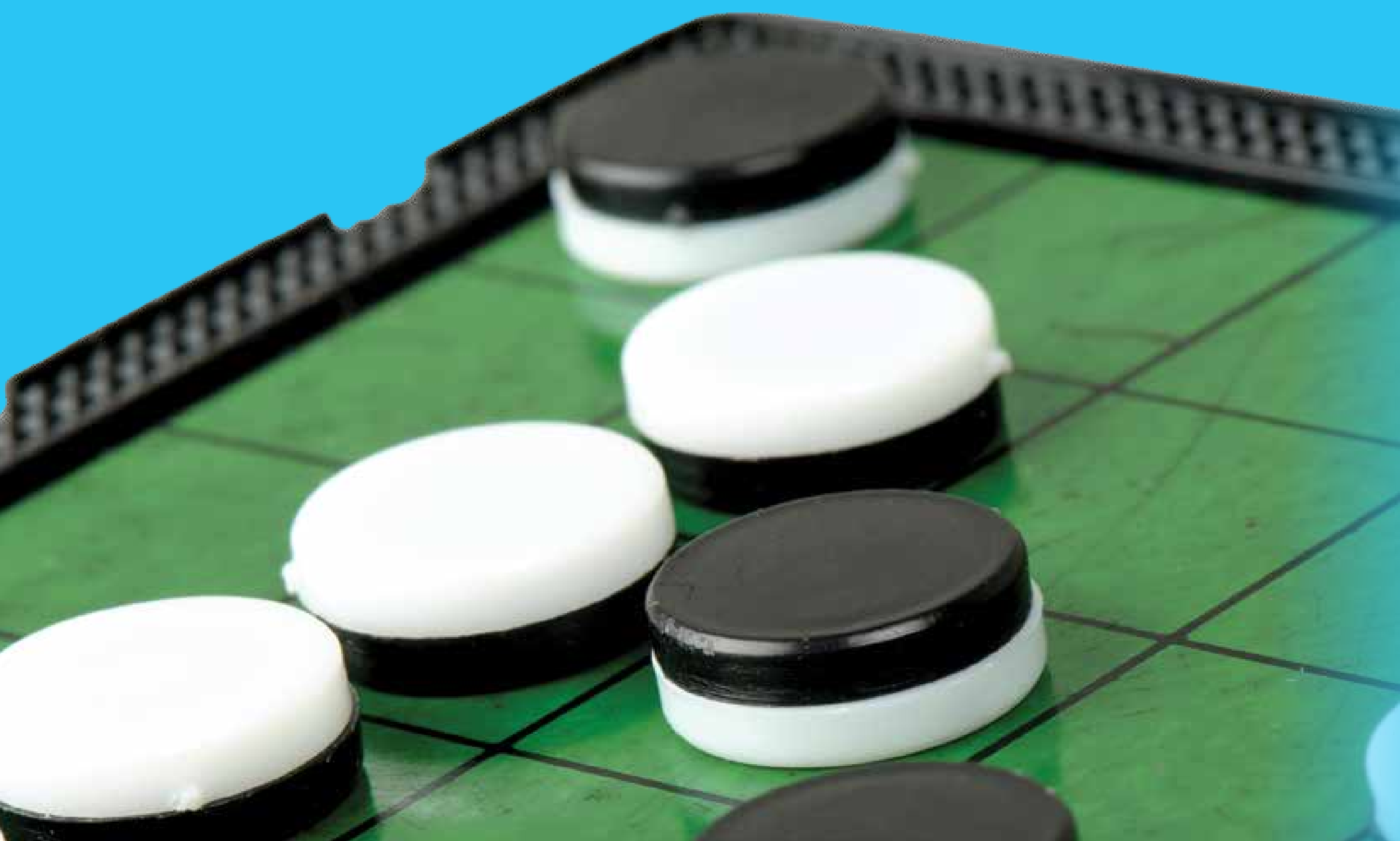
Le Grand logicien fou annonce :

« Vous allez me bander les yeux, mélanger les pions (sans en retourner) ; ensuite je manipulerai les pions et j'en ferai deux paquets *A* et *B*. Vous pourrez alors constater qu'il y aura le même nombre de pions noirs dans le paquet *A* et dans le paquet *B* ».

Cela semble totalement absurde : si les pions sont mélangés, le Grand logicien fou ne peut pas savoir où sont les pions montrant leur côté noir, et donc le partage qu'il prétend pouvoir faire est impossible.

Pourtant, on lui bande les yeux, il manipule les pions et compose deux paquets ayant chacun le même nombre de pions noirs.

Comment fait-il ? À vous de réfléchir et de résoudre ce qui apparaît comme un paradoxe.



Solution du paradoxe précédent

Mais qu'est-ce que j'ai fait ?

Rappel de l'énoncé

Considérons l'équation :

$$\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{4x-40}{13-x}.$$

L'équation peut s'écrire :

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x},$$

$$\text{d'où } \frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-x}.$$

Les numérateurs étant égaux, les dénominateurs le sont aussi, donc :

$$7 - x = 13 - x.$$

En additionnant x à chaque membre de l'équation, on a

$$7 = 13.$$

Qu'est-ce qui ne va pas ?

La solution

Nous avons utilisé la règle de simplification suivante :

Si deux fractions ayant le même numérateur a/b et a/c sont égales, alors les dénominateurs sont égaux b = c.

Revoyons la démonstration de cette règle qui semble évidente.

On part de :

$$a/b = a/c.$$

On multiplie par 1/a de chaque côté de l'égalité. Cela donne

$$1/b = 1/c.$$

On utilise alors la règle selon laquelle deux nombres qui possèdent le même inverse sont égaux, et donc : $b = c$.

Dans le raisonnement, on multiplie par $1/a$, ce qui suppose que a est différent de 0. La règle doit donc être énoncée sous la forme précise :

Si deux fractions ayant le même numérateur a/b et a/c avec $a \neq 0$ sont égales, alors les dénominateurs sont égaux $b = c$.

Dans notre calcul paradoxal, avions-nous $a \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 10$?

Justement non ! Par définition, x est la solution de l'équation :

$$\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{4x-40}{13-x}.$$

Calculons-la. En réduisant au même dénominateur, et en simplifiant, on obtient successivement :

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x},$$

$$\text{d'où } \frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-x}.$$

$$(4x-40)(13-x) = (4x-40)(x-7)$$

$$(4x-40)(13-x) - (4x-40)(x-7) = 0$$

$$4(x-10)(13-x-x+7) = 0$$

$$8(x-10)(10-x) = 0$$

On constate que la solution (et il n'y en a qu'une) est $x = 10$.

Nous avions donc appliqué la règle indiquée dans un cas illicite puisque la solution annule le dénominateur.