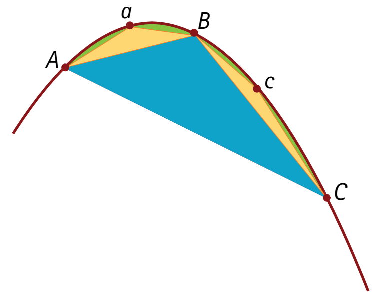
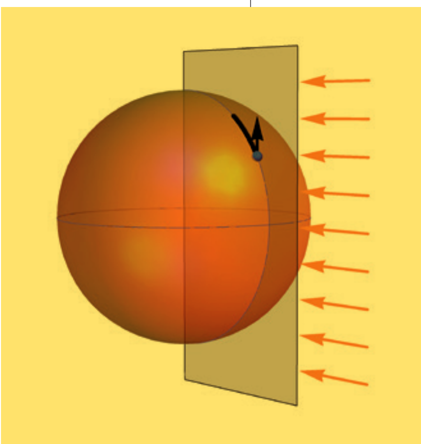
Section problèmes

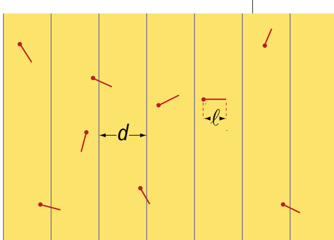


Cadran solaire



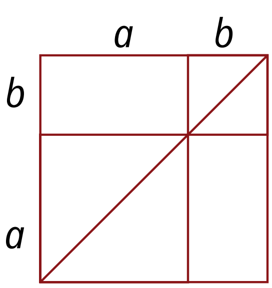
1. On considère un cadran solaire horizontal.
   a) Quel angle fait le style avec le cadran ?
   b) Montrer que si α est l'angle entre un plan horaire et le plan de midi, et si ϕ est la latitude du lieu, alors l'angle correspondant β dessiné sur le cadran est tel que
   $$\tan\beta = \tan\alpha \sin\phi.$$
2. Montrer que pour un cadran solaire équatorial, l'ombre de l'extrémité du style décrit un arc de cercle.
3. Pour un cadran horizontal, déterminer la forme des coniques décrites par l'ombre de l'extrémité du style selon la latitude et la période de l'année, c'est-à-dire la déclinaison.

Géométrie intégrale



1. On considère un plancher couvert de lignes parallèles qui sont toutes à une distance d l'une de l'autre. On fait tomber aléatoirement sur le sol une aiguille de longueur $\ell < d$. Montrer que la probabilité P que l'aiguille croise l'une des lignes parallèles est donnée par
$$P = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

La rhétorique d'Archimède



1. La proposition II.4 des *Éléments* d'Euclide peut se lire, en notation algébrique moderne, comme établissant le fait que
   $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
   La preuve d'Euclide repose sur la figure ci-contre. En vous appuyant sur des résultats de géométrie élémentaire, montrer comment en tirer cette identité célèbre.
2. Étant donné un segment parabolique, on s'intéresse aux polygones inscrits $\mathcal{P}_i$ successivement introduits via la construction géométrique d'Archimède (voir p. 22).
   a) Montrer que
   $$\text{aire}(\mathcal{P}_{k+1}) - \text{aire}(\mathcal{P}_k) = \frac{1}{4^k}\text{aire}(ABC).$$
   Tuyau : Le cas $k = 2$ est particulièrement instructif.
   b) En tirer une expression de l'aire de $\mathcal{P}_{k+1}$ comme somme d'une progression géométrique (finie), et évaluer cette dernière.
3. On s'intéresse à la démonstration de la proposition 23, telle que donnée par Archimède. En utilisant des notations modernes (introduites à la p. 24), montrer que
   $$A_1 + A_2 + ... + A_n + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_1.$$
   Tuyau : Pour $i = 2, ..., n$, posons $a_i = A_i/3$. On voit alors que
   $$A_i + a_i = A_{i-1}/3.$$
   Examiner la somme
   $$A_2 + a_2 + ... + A_n + a_n.$$
4. Étant donné un segment parabolique d'aire S, dénotons par ABC le triangle de même base et même hauteur, et posons $K = 4\,\text{aire}(ABC)/3$. En vous appuyant sur la construction géométrique d'Archimède, établir que $S = K$ en montrant que chacune des deux inégalités $S > K$ et $S < K$ mène à une contradiction. (Il s'agit là de la preuve donnée par Archimède à la proposition 24.)
   Tuyau : Pour le cas $S > K$, inscrire successivement des polygones jusqu'à ce que la partie omise du segment parabolique soit inférieure à $S - K$. Et pour l'autre, posant A_1 = aire(ABC), introduire des aires $A_2, ..., A_n$, chacune valant le quart de la précédente, jusqu'à ce que $A_n < K - S$. Dans les deux cas, on fera appel à la proposition 23 (voir l'exercice précédent).