Section problèmes

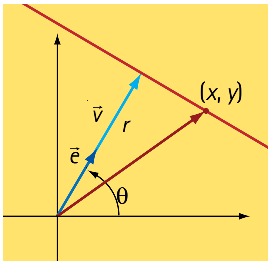
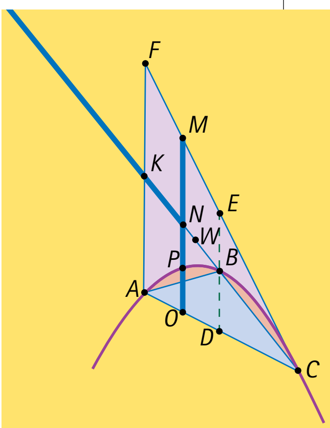


Image médicale

1. On considère une droite $R(r, \theta)$ passant par (x, y) et paramétrée par le vecteur $\vec{v} = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ (voir figure). Montrer que le produit scalaire du vecteur (x, y) avec le vecteur unitaire $\vec{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ dans la direction du vecteur $\vec{v}$ vaut précisément *r*.

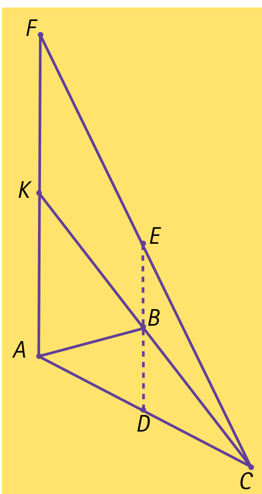
Confidences d'Archimède



1. On revient sur certaines des relations entre divers éléments de la figure au bas de la p. 20. En vous appuyant sur les propriétés géométriques de cette figure (voir ci-contre) – notamment sur les triangles semblables qu'on peut y observer –, montrer que :

   a) le point *N* est le milieu de *MO*;

   b) $\dfrac{MO}{OP} = \dfrac{CK}{KN}$.



2. On s'intéresse ici au résultat énoncé à la p. 21, comparant l'aire du triangle *ACF* à celle du triangle *ABC*.

   Rappelons que *AF* et *DE* sont parallèles, que *D* est le milieu de *AC* et *B*, le milieu de *DE*.

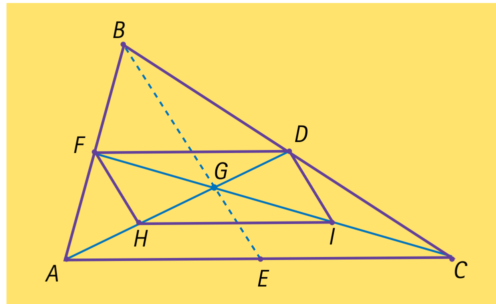
   Afin d'établir que le triangle *ACF* vaut, en aire, quatre fois le triangle *ABC*, montrer que

   a) l'aire du triangle *ACF* est le double de l'aire du triangle *ACK*;

   b) de même, *ACK* a une aire double de celle du triangle *ABC*.

3. Cet exercice porte sur le fait que dans un triangle quelconque, les trois médianes sont concourantes, le point où elles se rencontrent étant situé au tiers de chacune d'elles.

   (Rappelons qu'une *médiane* dans un triangle est un segment reliant un sommet au milieu du côté opposé.)



   a) Soit le triangle *ABC*. Intéressons-nous d'abord aux médianes *AD* et *CF* et appelons *G* leur point d'intersection. Considérons ensuite le quadrilatère *DFHI*, où *H* est le milieu de *AG* et *I*, le milieu de *CG*.

      Montrer que *DFHI* est un parallélogramme.

   b) En conclure que *DG* vaut le tiers de *AD* et *FG*, le tiers de *CF*.

   c) Considérant maintenant les médianes *AD* et *BE*, montrer que le raisonnement précédent peut être adapté de sorte à montrer que les médianes passent toutes les trois par le point *G*, et que celui-ci coupe chacune d'elles au tiers.

4. Nous reprenons l'idée d'un levier sur lequel seraient posées la Terre et la Lune, le point d'appui étant placé de manière telle que la masse de la Lune suffirait à soulever la Terre – voir l'encadré de la p. 21. Nous acceptons pour les fins du problème les données suivantes :[1]

   - masse de la Terre : $5{,}9722 \times 10^{24}$ kg
   - masse de la Lune : $7{,}3477 \times 10^{22}$ kg
   - rayon de la Terre : $6{,}3710 \times 10^{3}$ km
   - rayon de la Lune : $1{,}7375 \times 10^{3}$ km
   - distance Terre/Lune : $3{,}8440 \times 10^{5}$ km

   Déterminer la position du point d'appui du levier telle que le système soit en équilibre.

1. *Données tirées de deux sites de la NASA :* http://solarsystem.nasa.gov/planets/profile.cfm?Object=Earth&Display=Facts, *et* http://solarsystem.nasa.gov/planets/profile.cfm?Object=Moon&Display=Facts.