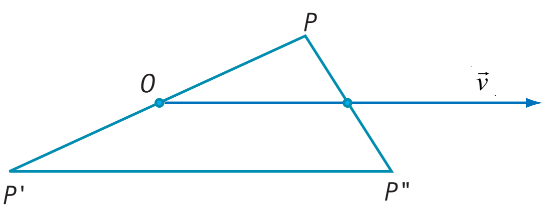
# Été–automne 2014
# Solutions

### Cristaux (secondaire)

1. Regardons la figure.




On est parti du point $P$. Une rotation d'ordre 2 l'a amené en $P'$, et une translation de $\vec{v}$ en $P''$. On doit montrer qu'il aurait abouti aussi en $P''$, si on avait effectué une rotation d'ordre 2 du point $P$ autour de $O'$, c'est-à-dire que $P$, $O'$, $P'$ sont alignés et

$$|PO'| = |O'P''|.$$

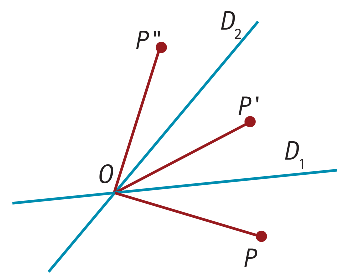
Il est plus simple de partir à l'envers et de montrer que si $P$ est envoyé sur $P''$ par la rotation d'ordre 2 autour de $O'$, alors $\overrightarrow{PP''}$ est parallèle à $\vec{v}$ et de même longueur. En effet, les triangles $OPO'$, $P'PP''$ et sont semblables car ils ont un angle égal, l'angle $\angle OPO'$, entre deux côtés semblables :

$$\frac{|PO|}{|PP'|} = \frac{|PO'|}{|PP''|} = \frac{1}{2}.$$

Donc, $\angle POO' = \angle PP'P''$, ce qui entraine que $OO'$est parallèle à $P'P''$, et

$$\frac{|OO'|}{|P'P''|} = \frac{1}{2}.$$

2. Regardons la figure.




Soit $P$ un point du plan, $P'$ son symétrique par rapport à la première droite, $D_1$, et $P''$ le symétrique de $P'$ par rapport à la deuxième droite, $D_2$.

On doit montrer que l'angle $\angle POP''$est le double de l'angle entre les deux droites. Ceci se voit tout de suite car $OP$ et $OP'$ font des angles égaux avec la première droite et $OP'$ et $OP''$ font des angles égaux avec la deuxième droite.

Problème 1 (collégial)

Soit $R$ une rotation de centre 0 et d'angle $\theta$,et soit $z = x + iy$ représentant le vecteur $(x, y)$. On a

$$R(z) = ze^{i\theta}, \text{ où } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Alors, $S(z) = R(z) + v = ze^{i\theta} + v$.

Cherchons le point fixe en posant $S(z) = z$. On obtient

$$z = \frac{v}{1-e^{i\theta}}$$

Ce point sera le centre de la nouvelle rotation. On fait un changement de coordonnée pour ramener ce point à l'origine en posant

$$Z = z - \frac{v}{1-e^{i\theta}}.$$