

L'arithmétique malmenée par la géométrie

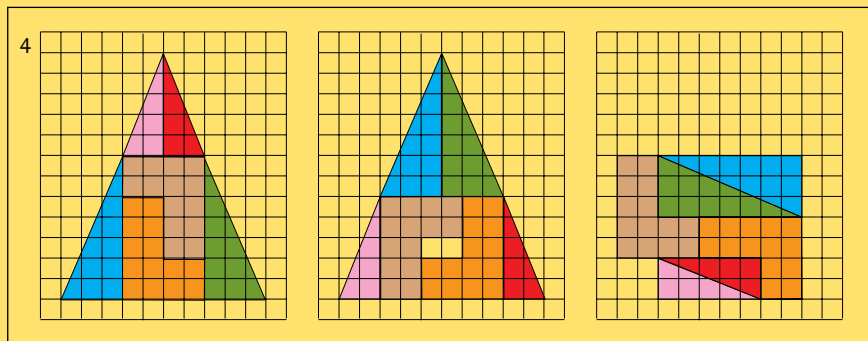
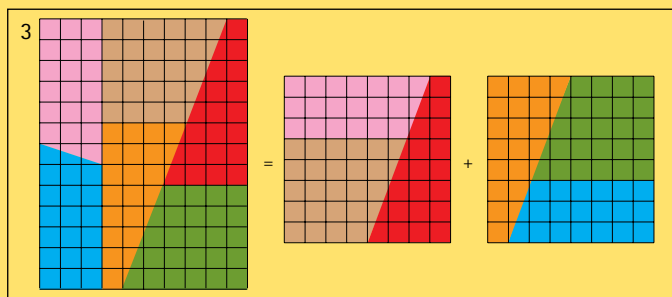
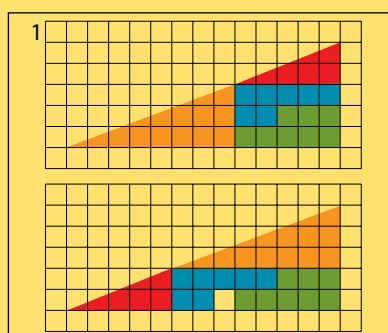
Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Les paradoxes suivants proviennent de la géométrie du découpage.

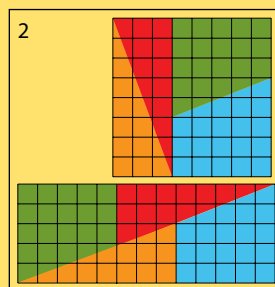
Si vous regardez attentivement la figure 1, vous devrez admettre qu'elle est étrange.

- Un triangle est découpé en quatre morceaux ;
- Les morceaux sont placés d'une nouvelle façon dans le triangle initial ;
- Surprise ! Il manque maintenant un carré pour en occuper totalement la surface.



Ce type de paradoxe est parfois attribué au magicien prestidigitateur Paul Curry (on parle de paradoxe de Curry) qui, en 1953, en aurait proposé un. Des traces plus anciennes ont cependant été trouvées de ce type de découpage dont l'origine reste mal connue.

La figure ci-contre est une démonstration par déplacements géométriques que 8×8 (l'aire du carré) est égal à 5×13 (l'aire du rectangle).



Pourtant $8 \times 8 = 64$

et $5 \times 13 = 65$. Aurait-on démontré que : $64 = 65$?

La figure 3 montre de même que

$$10 \times 13 = 8 \times 8 + 8 \times 8,$$

c'est-à-dire que :

$$130 = 128.$$

La figure 4 (due au psychiatre L. Vosburgh) montre que :

$$12 \times 10/2 = 12 \times 10/2 - 2 = 7 \times 9 - 4.$$

C'est-à-dire que :

$$60 = 58 = 59.$$

Comment tout cela est-il possible ?

L'interrogation surprise

La solution

Le professeur Martin affirme à ses élèves :

« (a) je ferai une interrogation la semaine prochaine et (b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera ; ce sera une surprise ». Jacques, le meilleur élève en mathématiques de la classe, raisonne alors ainsi : « Nous avons cours avec Monsieur Martin le lundi, le mardi, le mercredi, le jeudi, le vendredi et le samedi. Puisqu'il nous dit que nous ne pourrions pas connaître le jour de l'interrogation, celle-ci ne se déroulera pas le samedi, car samedi matin, sachant que l'interrogation se fera dans la semaine (affirmation a), elle ne pourrait avoir lieu que le samedi et donc nous saurions de manière certaine qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis que l'interrogation n'aura pas lieu le samedi. Mais alors, le vendredi, elle ne peut pas avoir lieu non plus car, sachant qu'elle ne peut pas avoir lieu le samedi, quand nous arriverons dans la classe le vendredi, nous saurons qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis aussi que l'interrogation n'aura pas lieu le vendredi. » En poursuivant de la même manière, Jacques en déduit que l'interrogation ne peut avoir lieu ni le jeudi, ni le mercredi, ni le mardi, ni le lundi et donc qu'elle n'aura pas lieu. Pourtant, le mercredi de la semaine suivante, Monsieur Martin fait son interrogation à la grande surprise de Jacques. Monsieur Martin n'a pas menti puisque (a) l'interrogation s'est bien déroulée dans la semaine prévue comme il l'avait affirmé, et que (b) Jacques a été surpris le jour de l'interrogation.

Le raisonnement de Jacques semble parfaitement rigoureux. Comment expliquer ce paradoxe ?

Pour comprendre le paradoxe il faut simplifier l'histoire. Imaginons que les élèves de Monsieur Martin n'ont cours avec lui que le lundi et qu'il leur dise « (a) je ferai une interrogation la semaine prochaine et (b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera ; ce sera une surprise ». Jacques pourra alors raisonner ainsi : « Le lundi matin, je saurai que l'interrogation va avoir lieu aujourd'hui (car Monsieur Martin nous dit qu'il fera une inter-

rogation cette semaine et que nous n'avons cours avec lui que le lundi) et qu'elle n'aura pas lieu aujourd'hui (car Monsieur Martin nous dit que nous serons surpris de l'interrogation or si elle a lieu le lundi nous ne serons pas surpris) ». Il y a contradiction entre les conclusions qu'on tire des affirmations de Monsieur Martin. Notons que, dans le cas d'une semaine complète, il y a aussi une telle contradiction : on déduit que l'interrogation aura lieu dans la semaine – Monsieur Martin l'affirme – et qu'elle n'aura pas lieu dans la semaine – raisonnement de Jacques. Donc ce que dit Monsieur Martin est contradictoire : il affirme une chose et son contraire à la fois. Dans le cas de la semaine complète de cours, cette contradiction est masquée, mais il y a bien une contradiction dans les affirmations de Monsieur Martin. Que peut-on déduire des propos de quelqu'un qui se contredit lui-même ? Tout et n'importe quoi. Il n'y a pas de paradoxe, seulement un drôle de professeur qui tient des propos incohérents – contradictoires – auquel on ne peut donc pas se fier. Il n'a aucune raison d'être fier de nous surprendre puisque quiconque se contredit surprend forcément ceux qui croient à la vérité de ses propos.

