

JEUX DE LUMIÈRE ET

La lumière traversant les cristaux dévoile la structure. Ce phénomène est aussi relié aux chatoiements des plumes de paon, à l'iridescence du nacre, aux miroitements des ailes de papillon et aux arcs-en-ciel produits par les disques compacts.

Yvan Saint-Aubin
Université de Montréal

Des ronds dans l'eau

Au bord d'un lac, les minutes précédant le coucher de soleil sont magiques. Les animaux diurnes se sont tus, les nocturnes ne font que se réveiller. Les vacanciers ont délaissé les plaisirs des sports aquatiques pour ceux de la chère. Le lac présente un miroir parfait.

Ceux qui auront le courage de briser ce moment de paix y lanceront une pierre pour admirer les vagues circulaires qui s'éloigneront du point de chute. D'autres, plus aventureux, y jetteront simultanément deux pierres, car les motifs que créent les deux ensembles de cercles s'entrelaçant sont d'une rare beauté.

Les vagues se propageant à la surface de l'eau donnent une métaphore précieuse pour la compréhension de plusieurs phénomènes lumineux. En effet, l'identification de la lumière à une onde comme la vague sur l'eau mène à une description fidèle de ces phénomènes. Par exemple deux ondes lumineuses se rencontrant créent aussi des motifs remarquables.

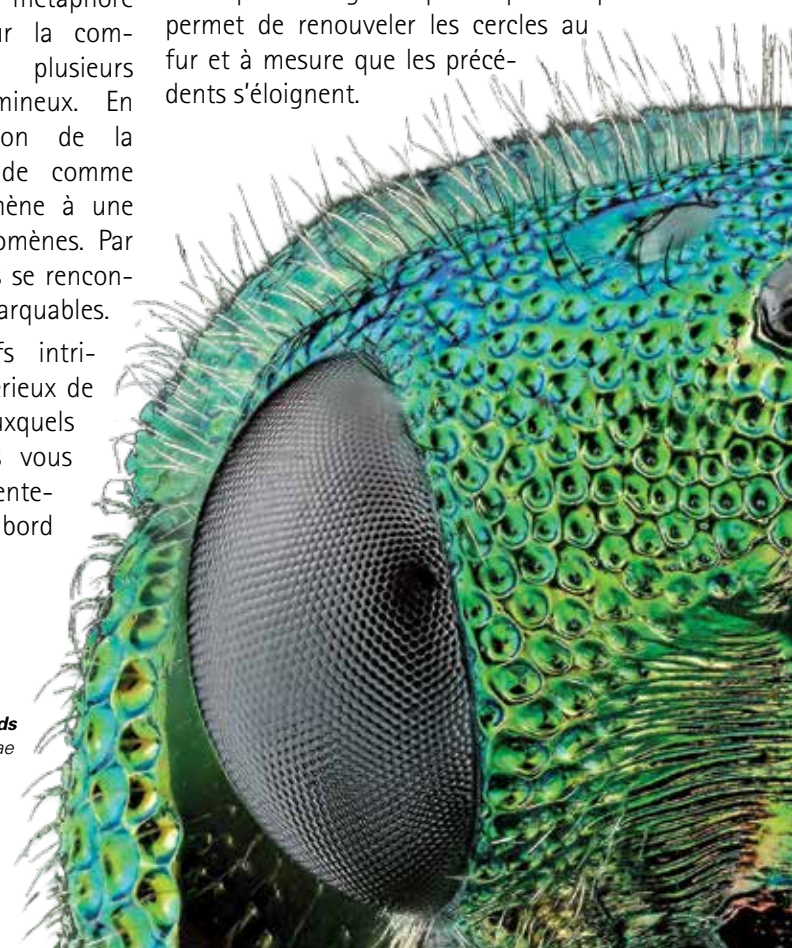
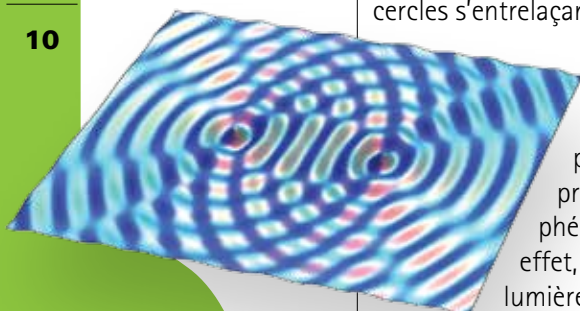
La description de ces motifs intrigants nécessite des exercices sérieux de trigonométrie et de géométrie auxquels je vous convie. J'espère qu'ils vous consoleront de ne pas être présentement à admirer le crépuscule au bord d'un lac québécois.

Deux fentes éclairées : un premier exercice de trigonométrie

L'expérience des deux pierres lancées simultanément n'est qu'un exemple où des ondes de diverses sources se superposent. Si leurs amplitudes en un point sont de même signe, on dit qu'elles interfèrent de façon *constructive* et, si elles sont de signes opposés, que cette interférence est *destructive*.

Si deux pierres identiques sont lancées en même temps, les ondes produites seront en phase : les cercles créés par les crêtes des vagues auront les mêmes rayons pour les deux pierres. Le seul désavantage de cette expérience est que les cercles concentriques s'éloigneront, laissant un calme plat aux lieux des impacts. Imaginons plutôt qu'un dispositif permet de renouveler les cercles au fur et à mesure que les précédents s'éloignent.

Tête d'une guêpe à cafards
Ampulicidae

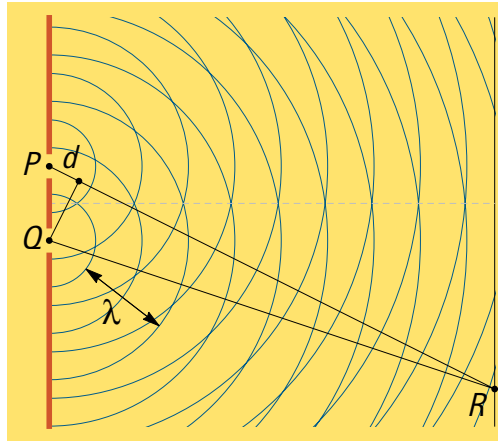


D'INTERFÉRENCE

La figure à la page 10 a été tracée pour de telles vagues au moment où les centres sont à leur maximum. Sur un lac, un tel dispositif est alambiqué, mais des expériences, par exemple un faisceau lumineux cohérent passant par deux fentes voisines, permettent de bien étudier ce phénomène en laboratoire. Mais, si vous aimez l'image de pierres lancées à l'eau, gardez-la en tête!

Notre prochaine étape consiste à étudier l'onde observée le long d'une droite parallèle à celle joignant les centres. Elle est certainement plus complexe que celle créée par une pierre unique. En effet les temps pour atteindre le point R à partir des points d'impact P et Q sont distincts : celle quittant P doit parcourir une distance d de plus que celle partant de Q . Les ondes arrivant au même moment en R ne sont pas parties de P et Q au même moment. (Celle émanant de P a dû partir plus tôt!) Ainsi les deux ondes arrivent avec un déphasage qui dépend du point R .

Chacune des ondes décrites ci-haut à droite est bien représentée par une fonction cosinus, avec une amplitude qui décroît avec la distance parcourue. L'argument de ces cosinus, appelé aussi la *phase*, dépend du temps. Les demi-cercles bleus sur la figure précédente dénotent les maxima et minima

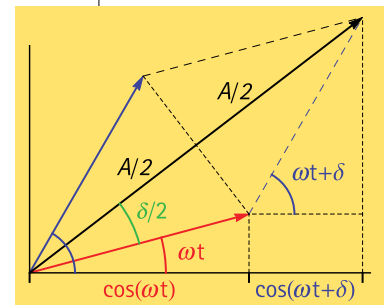


consécutifs des ondes, et donc de ces cosinus, provenant de P et Q . La distance radiale entre deux maxima est notée λ et est appelée *longueur d'onde*. Puisqu'entre deux maxima, la phase des cosinus s'accroît de 2π , le déphasage δ entre les deux ondes est $2\pi d/\lambda$. Ainsi le point R verra approximativement une somme de deux ondes de la forme¹

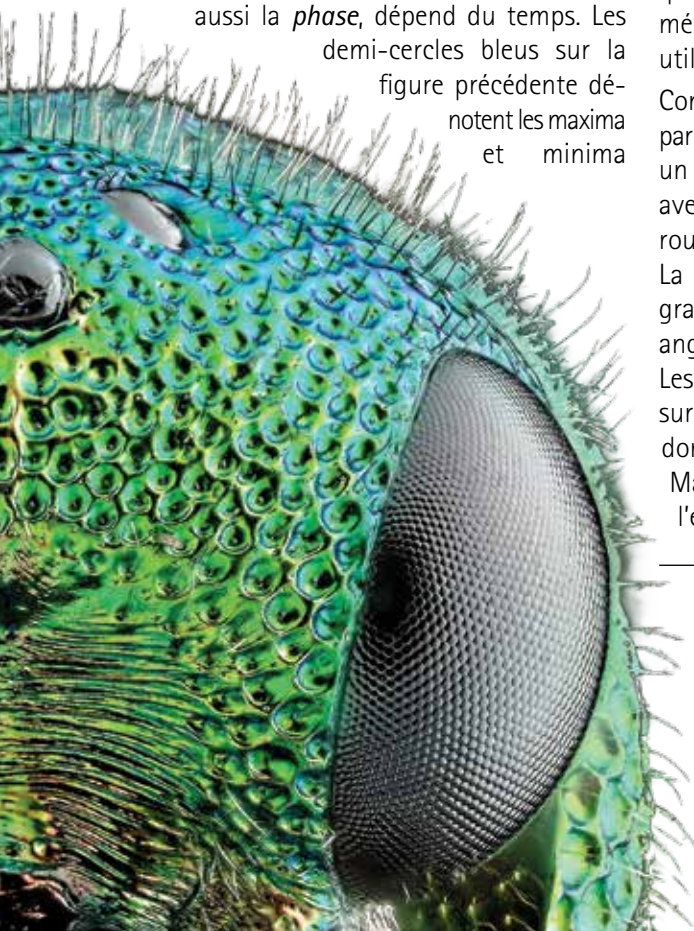
$$\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \delta).$$

La plupart d'entre nous savons comment réécrire la somme de deux cosinus en termes d'un produit de cosinus. Permettez-moi quand même d'en donner une preuve géométrique; cet élégant argument nous sera utile par la suite.

Considérons le parallélogramme engendré par deux vecteurs v_1 et v_2 de longueur 1 et faisant un angle ωt et $\omega t + \delta$ respectivement avec l'horizontale. Ils sont tracés en rouge et bleu sur la figure ci-contre. La diagonale longue de ce parallélogramme, tracée en noir, fait elle un angle $\omega t + \delta/2$ avec l'horizontale. Les projections de ces deux vecteurs sur l'horizontale sont les deux cosinus dont nous voulons calculer la somme. Mais en reportant le vecteur v_2 à l'extrémité de v_1 , nous remarquons que cette



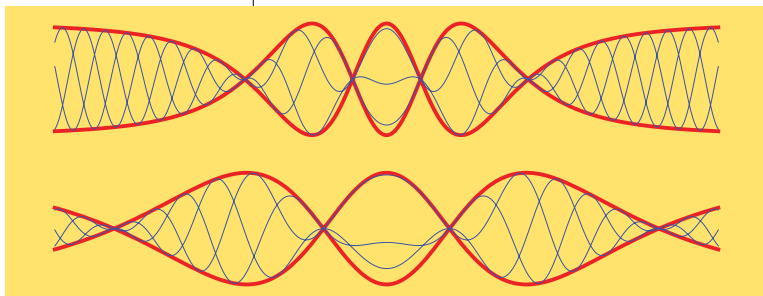
1. L'approximation est la suivante. La densité d'énergie sur un cercle éloigné de la source est plus faible que celle sur un plus proche. Ainsi, l'onde provenant de P possède une amplitude légèrement inférieure à celle provenant de Q et les deux cosinus devraient avoir une amplitude distincte. Je néglige cette différence ici.



somme est la projection de la diagonale sur l'horizontale. Elle est simplement $A \cos(\omega t + \delta/2)$, où A est la longueur de cette diagonale. Cette dernière peut être aisément calculée. En effet, la diagonale courte coupe la longue en deux parties égales qui sont de longueur $\cos \delta/2$. Ainsi $A/2 = \cos \delta/2$ et

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t) + \cos(\omega t + \delta) \\ &= [2 \cos \delta/2] \cdot [\cos(\omega t + \delta/2)]. \end{aligned}$$

Cette reformulation géométrique permet donc d'interpréter les deux facteurs entre crochets de l'identité trigonométrique: le premier est la longueur de la diagonale longue du parallélogramme engendré par v_1 et v_2 et le second est déterminé par l'angle qu'elle sous-tend avec l'horizontale.



Ce second facteur dépend du temps et la somme des deux ondes suivra ses fluctuations. Le premier cependant ne dépend que de δ , donc que du point R , et restreint l'amplitude maximale de l'onde observée en ce point. Les deux figures ci-dessus tracent l'onde sur une droite parallèle à celle contenant les fentes. La figure du haut est l'onde le long d'une droite plus proche des fentes que celle du bas. Les courbes en rouge tracent le premier facteur $2 \cos \delta/2$ ainsi que $-2 \cos \delta/2$. Elles forment une gaine où la superposition des deux cosinus est confinée. Cette superposition (la somme des cosinus) y est tracée en bleu pour divers temps t . L'enveloppe rouge sur la figure du haut semble comprimée par rapport à celle du bas. Comme pour les ronds dans l'eau, les vagues en bleu s'éloignent du centre de la droite au cours du temps. Changer la distance entre les centres ou la longueur d'onde changerait également ces profils.

Plusieurs fentes éclairées : un second exercice de trigonométrie

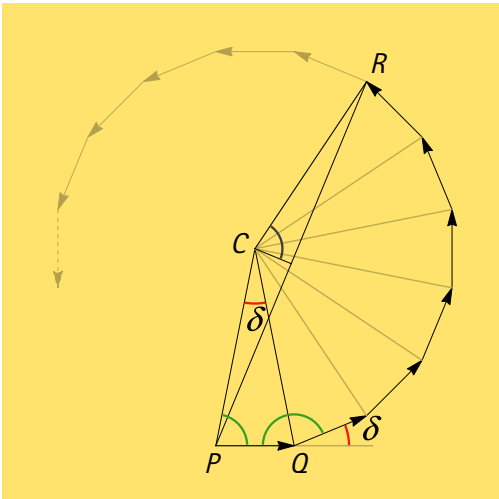
Il semble que l'Américain David Rittenhouse ait été le premier, en 1785, à tenter d'observer expérimentalement le profil d'interférence produit par plusieurs fentes. Puisque l'espace entre les fentes et la longueur d'onde de la lumière doivent avoir des ordres de grandeur proches, Rittenhouse utilise des cheveux qu'il tend entre deux vis. Cette expérience semble un peu... tirée par les cheveux. Est-elle le passe-temps d'un scientifique désœuvré? Certainement pas! Elle constitue le premier pas pour comprendre la diffraction de la lumière (en dimension un) par les cristaux qui ont été introduits dans un autre article du présent numéro d'*Accromath*. Notre but ici sera cependant plus modeste; nous verrons que ces réseaux de fente parviennent à séparer les couleurs de la lumière blanche comme le fait un prisme. C'est le phénomène d'*iridescence*.

Puisque chaque fente agit maintenant comme une source, l'onde observée en un point R le long d'une droite parallèle à celle passant par les n sources sera une somme de n cosinus, chacun accusant une petite phase δ de retard ou d'avance par rapport à son voisin² :

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t) + \cos(\omega t + \delta) + \\ & \cos(\omega t + 2\delta) + \dots + \cos(\omega t + (n-1)\delta). \end{aligned}$$

2. Encore une approximation ici: les déphasages devraient être légèrement différents pour chaque cosinus. Cependant la distance du point d'observation R est beaucoup plus grande que la distance entre les fentes et ces déphasages peuvent être identifiés à un même δ .

Comme précédemment, il est possible d'écrire cette somme comme produit d'un facteur dépendant de ωt et d'un autre facteur ne dépendant que de la phase δ . Le joli argument que voici est dû à Richard Feynman et permet d'identifier sans trop de difficulté le facteur ne dépendant que de δ qui cause l'iridescence. Il repose sur la reformulation géométrique proposée précédemment.



La figure ci-dessus est tracée de façon à ce que l'axe horizontal soit le long d'un vecteur à angle ωt . Ainsi le premier cosinus y est représenté comme un vecteur horizontal, le segment PQ . Comme précédemment, le second cosinus sera représenté comme un vecteur faisant un angle δ avec le premier, le troisième par un dont l'angle est 2δ , ..., jusqu'au dernier qui fera un angle $(n-1)\delta$ avec l'horizontale. Sur la figure, $n = 7$ vecteurs ont été tracés en noir et quelques-uns ont été ajoutés en plus pâle.

En choisissant de coucher le premier vecteur sur l'axe horizontal, le système d'axes analogue à celui utilisé pour le cas à deux fentes tourne au cours du temps (dû au terme ωt) et l'axe sur lequel il faut faire la projection du segment PR tourne également. Mais puisque nous sommes intéressés au facteur ne dépendant que du déphasage δ , ce choix est plus simple.

Considérons donc les n vecteurs en noir. Ces n vecteurs de longueur égale décrivent une figure régulière autour d'un centre C , chacun étant la base d'un triangle isocèle.

Notre étude débute au point Q . Trois angles s'y rencontrent : l'angle δ tracé en rouge et, en vert, deux angles qui sont égaux puisqu'ils appartiennent à des triangles égaux. Puisque la somme de ces trois angles est π , il faut donc que l'angle au sommet C du triangle isocèle soit également δ . Mais alors la longueur des côtés CP et CQ est donnée par

$$\overline{CP} = \frac{\overline{PQ}}{2 \sin \delta/2}.$$

L'angle entre les segments CP et CR est la somme des angles au sommet de n triangles égaux, c'est-à-dire $n\delta$, et l'angle en bleu est $n\delta/2$. Ainsi la longueur du segment PR est donnée par

$$\overline{PR} = 2 \overline{CP} \sin(n\delta/2).$$

La longueur du segment PR est le facteur ne dépendant que de δ de la somme désirée et est donc donnée par

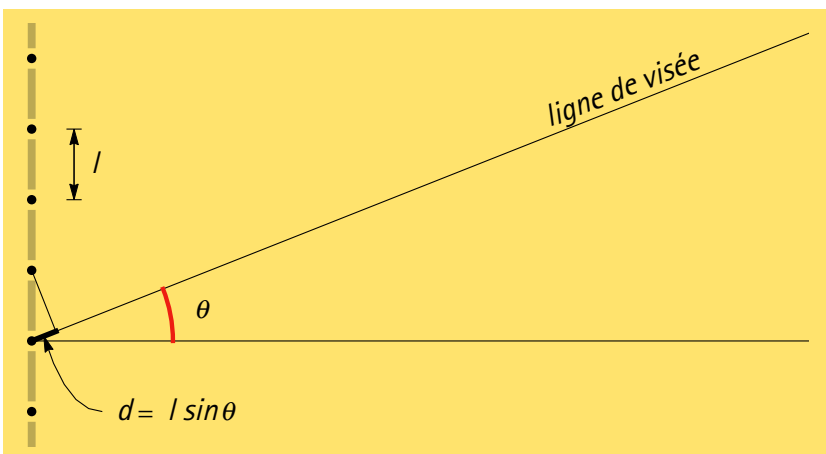
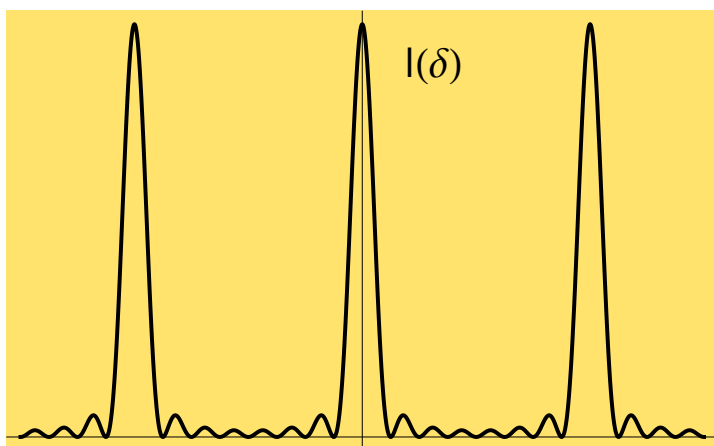
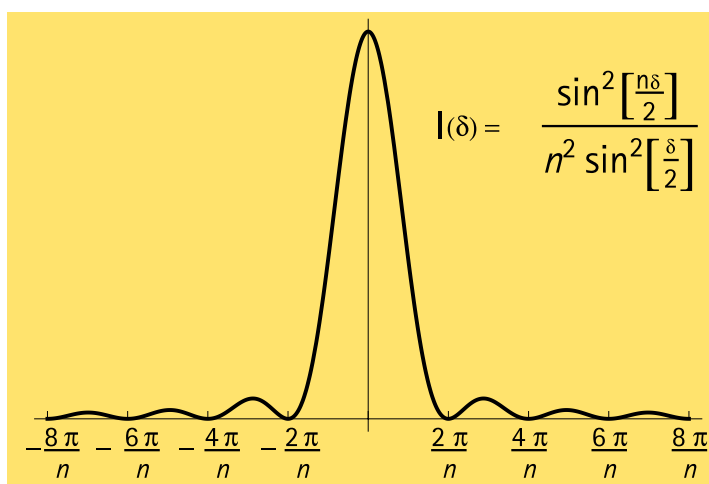
$$\overline{PR} = \frac{\overline{PQ} \sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}.$$

L'énergie lumineuse perçue par l'œil sera proportionnelle à son carré.

Cette expression, telle qu'écrite, n'est pas définie en $\delta = 0$. Mais il est possible de montrer qu'elle tend vers n lorsque δ s'approche de zéro. Le graphique à la page suivante montre la fonction

$$I(\delta) = \left(\frac{\sin(n\delta/2)}{n \sin(\delta/2)} \right)^2.$$

Ses zéros sont ceux du numérateur et tombent donc aux multiples entiers non nuls de $2\pi/n$. Le pic central est deux fois plus large que tous les autres. Les autres maxima tombent presque aux multiples impairs de π/n . (Pourquoi ceci n'est-il qu'une approximation?) Ainsi la diffraction d'un faisceau lumineux par un réseau de n fentes concentre la lumière en une raie de grande intensité suivie de petites raies portant peu d'énergie.



Mais la fonction $I(\delta)$ a une autre propriété remarquable. Elle est périodique : quand δ est remplacé par $\delta + 2\pi$, la fonction demeure inchangée, comme l'indique le second graphique. Ainsi $I(\delta)$ a des pics intenses aux δ qui sont des multiples entiers de 2π .

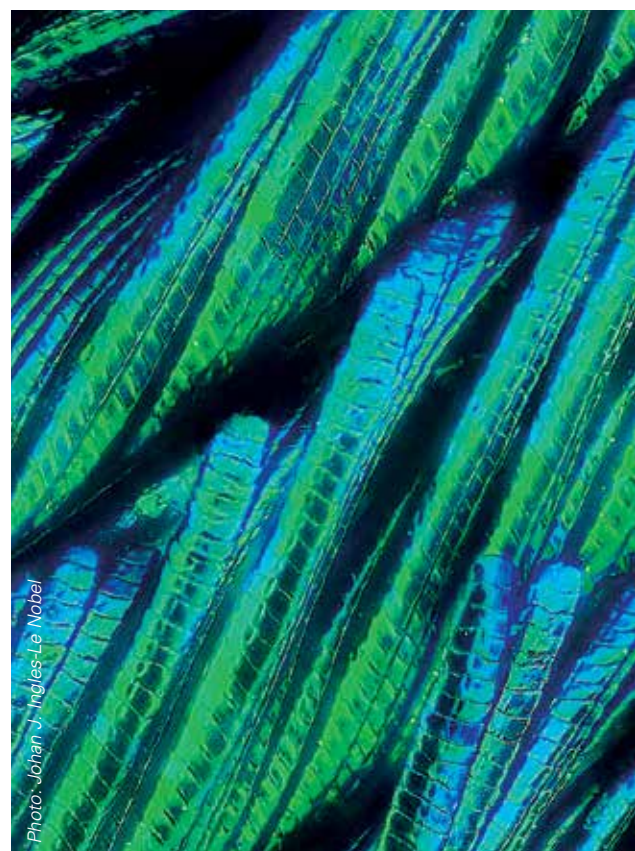
Si l dénote la distance entre les fentes et θ l'angle que fait la ligne de visée avec la perpendiculaire au réseau des fentes, alors $d = l \sin \theta$ et donc

$$\delta = \frac{2\pi l \sin \theta}{\lambda}$$

L'œil verra donc des pics intenses aux angles de visée qui satisfont

$$\lambda m = l \sin \theta$$

pour un entier m . Puisque cette relation dépend de la longueur d'onde et que les différentes couleurs ont des longueurs d'onde différentes, les pics rouges tomberont à des angles différents des verts et des bleus. Cette séparation des couleurs selon l'angle de visée est le phénomène d'*iridescence*.



Plumes de paon

Plumes de paon, nacre et ailes de papillon

« Les parties des plumes de cet oiseau glorieux apparaissent, sous le microscope, tout aussi éclatantes que ces plumes dans leur totalité. »

Robert Hooke, Micrographia, 1685.

« Les plumes finement colorées de certains oiseaux, en particulier celles des queues de paons, arborent, dans une même partie de la plume, plusieurs couleurs selon la position de l'œil. »

Isaac Newton, Optiks, 1704.

Peut-être entendez-vous ce mot « iridescence » pour la première fois. Pourtant vous avez observé le phénomène plusieurs fois dans votre vie. Une expérience fort commune est le chatoyement multicolore de la surface gravée des disques compacts. Les sillons

contenant la musique numérique sont similaires à un réseau de fentes. Plutôt que traverser ces sillons, la lumière est reflétée par le disque, mais l'effet est le même : la lumière blanche qui frappe les sillons est décomposée en ses diverses couleurs. En inclinant le disque par rapport à l'œil, c'est-à-dire en changeant l'angle de visée, les couleurs passeront du rouge au jaune, vert, bleu, indigo et au violet, pour recommencer pour un angle plus marqué avec le rouge.

Les plumes de paon, les ailes de certains papillons et le nacre offrent d'autres exemples d'iridescence. Et malgré son nom peu réjouissant, la tête de la guêpe à cafards offre aussi un spectacle magnifique. Dans tous ces cas, la structure microscopique qui est la cause de leur iridescence est difficile à observer à l'œil nu. Par exemple c'est l'empilement de minuscules plaquettes d'épaisseur d'environ 5×10^{-7} m qui crée le « réseau » du nacre. Mais l'observation du phénomène, elle, est aisée : par exemple, sur la plume de paon, chacune des barbules passe du vert au bleu selon son orientation par rapport à notre ligne de visée, comme l'avait remarqué Newton.

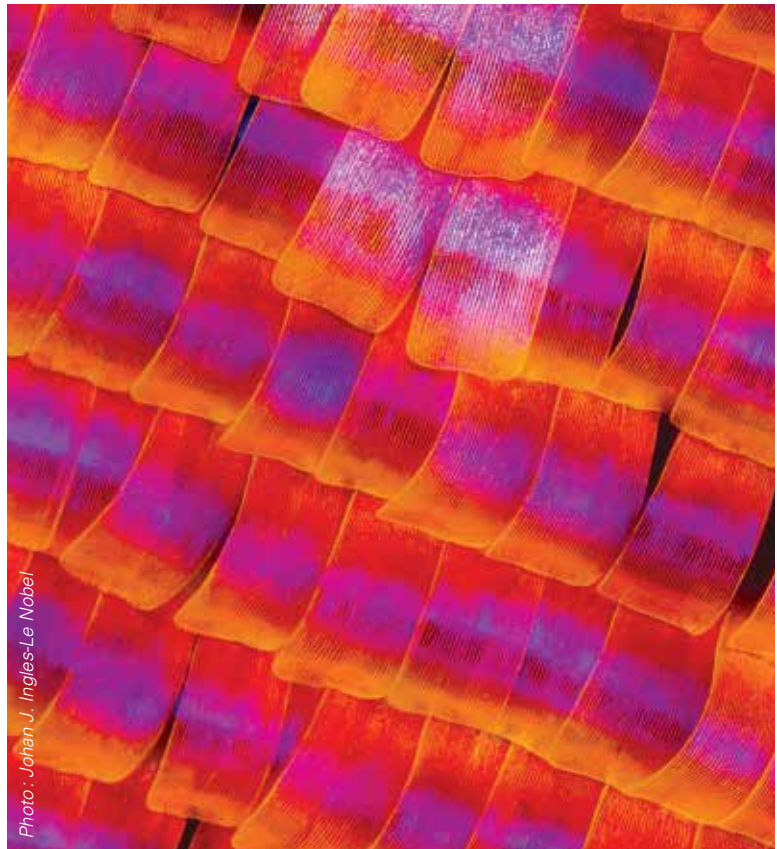
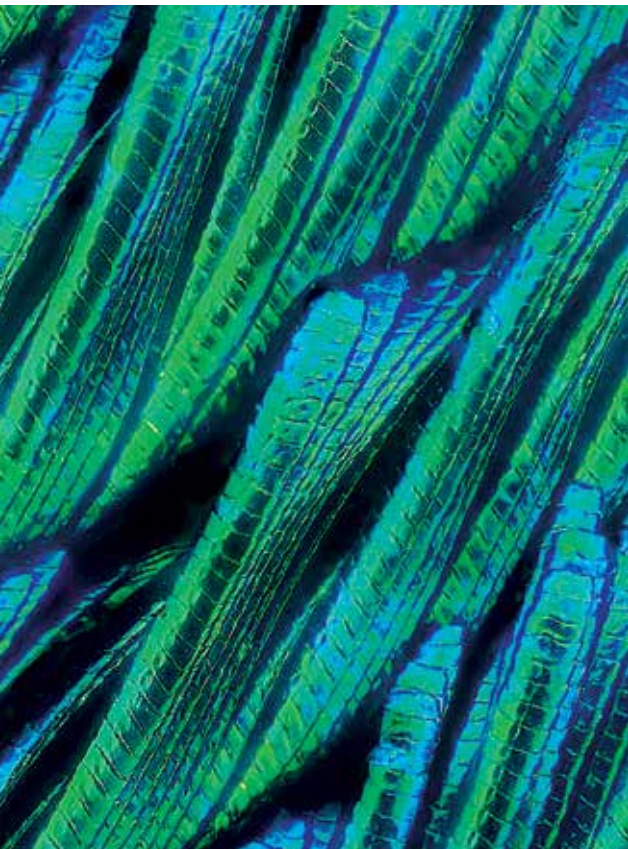


Photo : Jehan J. Ingles-Le Nobel
Aile du papillon *Chrysidia rhipheus*