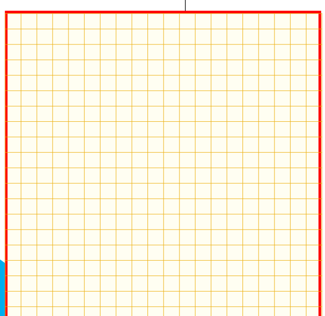
Dans les sols sablonneux l'eau s'infiltre, alors qu'elle ne peut pénétrer dans un sol argileux. Il en est de même avec votre filtre à café : si votre café est moulu trop fin et que vous avez mis une trop grosse épaisseur de café, alors l'eau ne réussit plus à passer. Un modèle mathématique, la percolation, permet d'étudier ce phénomène. Et les applications sont multiples, y compris dans l'extraction du pétrole.

PASSERA, PASSERA PAS ?

Christiane Rousseau
Université de Montréal

Pour expliquer les notions, nous allons nous limiter au problème plan mais nous pourrions généraliser la discussion qui suit au problème dans l'espace.

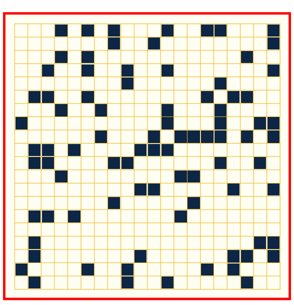


Regardons une grille carrée 20×20. Pour chaque case, nous décidons au hasard de la laisser ouverte (ou blanche) avec probabilité p, ou de la remplir avec probabilité $1 - p$ et ce, indépendamment des autres cases. Une case remplie bloque le passage.

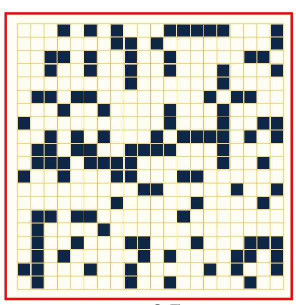
Y a-t-il un passage du haut vers le bas dans les cases blanches, si les passages de coin ne sont pas autorisés ?

Voici ce que cette expérience aléatoire peut donner pour différentes valeurs de p :

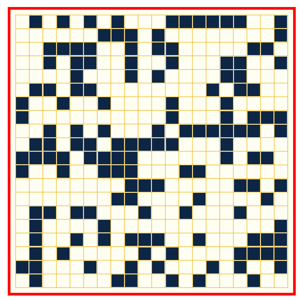
Pour $p = 0{,}8$ et $p = 0{,}7$ on voit un passage de haut en bas sur les cases blanches. Pour $p = 0{,}6$, on ne voit plus de passage.



$p = 0{,}8$

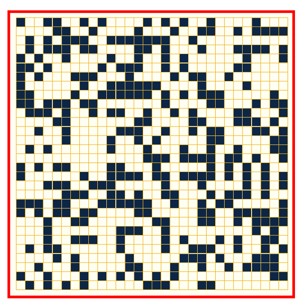


$p = 0{,}7$



$p = 0{,}6$

Mais, ci-dessous, en répétant l'expérience après avoir augmenté la grille à 30×30, un passage s'est dessiné : le voyez-vous ?



Maintenant, à $p = 0{,}55$, même en agrandissant la grille et en répétant l'expérience plusieurs fois, on peut s'apercevoir que la probabilité est presque nulle de voir un passage se dessiner.

$p = 0{,}55$

Bien sûr, comme chaque grille est remplie au hasard, pour un même p et une même taille de grille $N \times N$, on peut avoir des grilles qui permettent le passage, et d'autres pour lesquelles le passage est bloqué. Ce qui est intéressant, c'est de connaître la probabilité de passage comme fonction de p et de N. Et, si on veut se servir du modèle de percolation dans les applications, par exemple pour l'écoulement de l'eau dans un sol argileux, on doit regarder ce qui se passe quand N est grand. On fait donc tendre N vers l'infini. On peut assez facilement se convaincre (voir encadré page suivante) que cette probabilité de passage est donnée par un polynôme en p de degré N^2. Par contre, donner la formule du polynôme est hors de portée. Mais, comment étudier un polynôme de degré N^2, si N est grand et si sa formule n'est pas explicite ?

Appelons $P_N(p)$ ce polynôme qui donne la probabilité de passage vertical dans une grille $N \times N$, lorsque chaque case a probabilité p d'être ouverte (ou blanche). On commence par calculer $P_N(p)$ pour de petites valeurs de N. Dès que $N \geq 4$ on a besoin de l'ordinateur pour faire le calcul qui est loin d'être trivial à cause du grand nombre de configurations possibles de cases ouvertes et fermées (ou remplies et noires). Le graphe de $P_N(p)$ pour différentes valeurs de N apparaît sur la figure ci-dessous et on voit très bien que ce graphe devient très vertical au voisinage de $p = 0{,}5927$, lorsque N devient grand, d'où le saut brutal dans la valeur de $P_N(p)$.

La forme du polynôme nous suggère le premier grand résultat de la percolation :

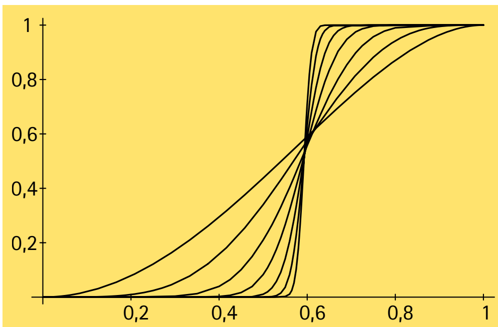
À la limite, lorsque N tend vers l'infini, il *existe une probabilité critique*, p_c, telle que

- pour $p > p_c$, alors on a probabilité 1 d'avoir un passage, et
- pour $p < p_c$, alors on a probabilité 0 d'avoir un passage.

La preuve de ce résultat théorique par Kesten est le contenu d'un livre entier, mais le résultat se comprend aisément.

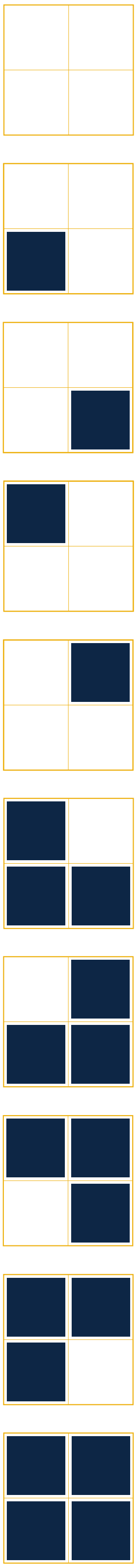
Cette probabilité critique intéresse énormément les physiciens, puisque le système change radicalement de propriétés physiques lorsque p traverse p_c : brusquement le matériau passe d'imperméable à perméable. On parle de *transition de phase*.

Comme la probabilité de passage passe d'une valeur presque nulle à une valeur très proche de 1 lorsque p passe p_c et N est grand, il est facile de se convaincre que le résultat reste valide si, au lieu d'une grille carrée, on avait une



Graphe de $P_N(p)$[1] pour $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$.

1. *Reproduit de l'article « Conformal invariance in two-dimensional percolation », de Robert Langlands, Philippe Pouliot et Yvan Saint-Aubin dans le* Bulletin de l'American Mathematical Society, *vol 30, Janvier 1994*



La probabilité de passage dans la grille carrée $N \times N$ est donnée par un polynôme de degré N^2.

Nous allons expliquer l'argument dans le cas $N = 2$. Dans ce cas, nous avons 4 cases et, pour chaque case, 2 possibilités : la case est ouverte ou fermée. Ceci nous donne $2^4 = 16$ configurations possibles de cases ouvertes ou fermées. La probabilité cherchée est la somme des probabilités de passage pour chacune des configurations.

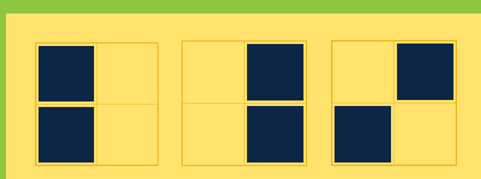
On a une seule configuration avec aucune case ouverte et exactement quatre configurations avec une case ouverte.

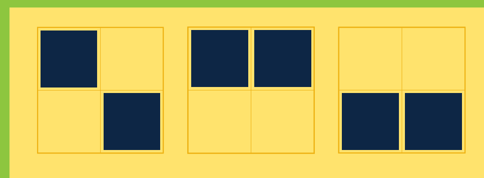
Aucune de ces configurations ne permet le passage.

On a une configuration avec toutes les cases ouvertes : comme chaque case a probabilité p d'être ouverte, cette configuration apparaît avec probabilité p^4.

On a quatre configurations avec trois cases ouvertes. Chacune a probabilité $p^3(1-p)$. Donc, ces configurations contribuent pour $4p^3(1-p)$ à la probabilité de passage.

Il nous reste les 6 configurations avec deux cases ouvertes : voir figure. Chacune a probabilité $p^2(1-p)^2$.





Seulement deux de ces configurations contribuent au passage, donnant une probabilité $2p^2(1-p)^2$ de passage avec deux cases.

La probabilité cherchée est donc

$$P_2(p) = p^4 + 4p^3(1-p) + 2p^2(1-p)^2,$$

qui est bien un polynôme de degré 4.

On voit déjà pointer le cas général : dans le cas d'une grille $N \times N$, le polynôme $P_N(p)$ sera une somme de polynômes de degré N^2. Lorsque une configuration avec k cases ouvertes permet un passage, sa contribution à la probabilité est de la forme $p^k(1-p)^{N^2-k}$. Mais combien a-t-on de configurations avec k cases ouvertes et permettant le passage ? Déjà, pour $N = 2$ et pour les configurations à deux cases ouvertes, il a fallu décider de manière ad hoc s'il y avait passage ou non. Comme $N = 2$ était petit, c'était facile, mais décider combien de configurations permettent le passage pour k cases ouvertes et N grand peut devenir un défi, même pour un ordinateur. On a déjà 512 configurations quand $N = 3$ et 65 536 quand $N = 4$ ...

grille rectangulaire : la probabilité critique reste la même. En fait, le résultat est encore valide si on regarde un domaine de forme plus générale, et qu'on s'intéresse à un passage intérieur entre deux zones distinguées de la frontière. On voit poindre quelques-unes des propriétés de la percolation que l'on regroupe sous le terme d'*universalité*.

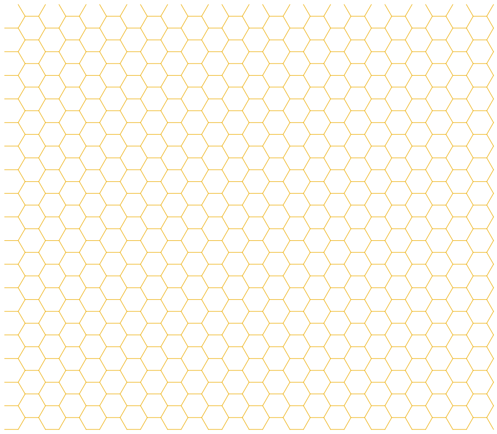
Peut-on calculer la probabilité critique ?

En général, c'est un problème très difficile. Pour le réseau carré que nous venons de voir il est connu que

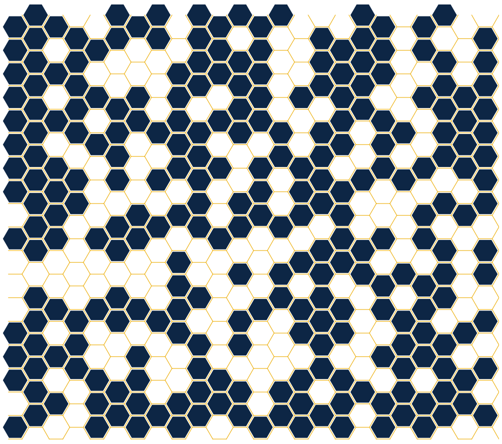
$$p_c \approx 0{,}5927,$$

tel qu'observé sur la figure.

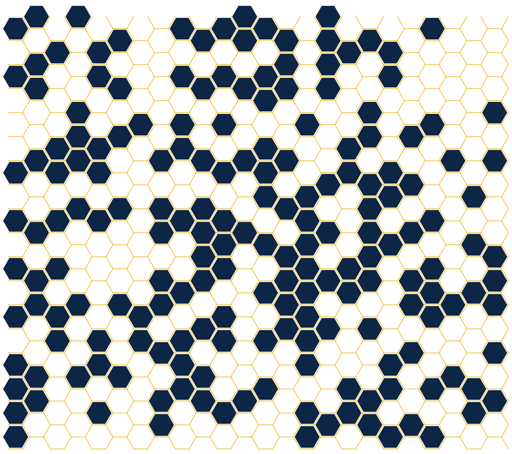
D'autres réseaux du plan ont une probabilité critique égale à 1/2. Dans au moins un cas on peut donner un argument simple et astucieux qui permet de prouver ce résultat. C'est le cas du réseau à cases hexagonales. Dans un tel réseau, deux cases ne peuvent se toucher par un sommet seulement, et deux cases qui se touchent ont une arête commune.



Ce réseau a la propriété remarquable que si l'on n'a pas de passage vertical blanc, alors on a un passage horizontal noir.



Ici, à p =0,4, on a un passage noir de gauche à droite (donc pas de passage blanc de haut en bas), alors que ci-dessous, à p =0,55, on a un passage blanc ouvert de haut en bas.



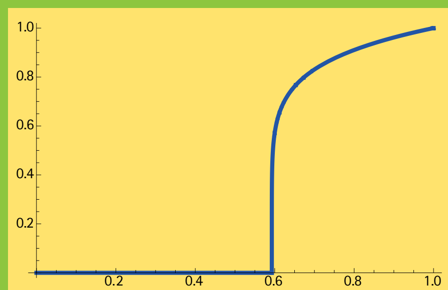
Cette propriété n'était pas satisfaite pour le réseau carré, puisqu'on ne peut passer par les coins. Notre grille 20×20 avec $p = 0,6$ est un contre-exemple : il n'y a, ni passage blanc de haut en bas, ni passage noir de gauche à droite.

Expliquons maintenant pourquoi il est naturel que $p_c = 1/2$ pour le réseau à cases hexagonales. Sur nos grilles, nous avons deux couleurs de cases : des noires et des blanches. Nous admettrons que la probabilité critique est la même pour les passages horizontaux blancs et verticaux noirs.

Deux propriétés universelles

Probabilité qu'une case appartienne à un amas infini

Soit $\theta(p)$ la probabilité qu'une case particulière d'un réseau du plan soit dans un amas infini. Pour $p < p_c$, $\theta(p)$ est nulle, alors que $\theta(p)$ devient non nulle pour $p > p_c$, ce qui donne un graphe comme sur la figure suivante.



Pour $p > p_c$ au voisinage de p_c, elle a un comportement de la forme

$$\theta(p) \approx (p - p_c)^{5/36},$$

où l'exposant 5/36 est universel, c'est-à-dire indépendant du réseau dans le plan. En particulier, la fonction est continue à $p = p_c$, et $\theta(p_c) = 0$.

La taille moyenne de l'amas contenant une case donnée

En dimension 2, soit $\chi(p)$ cette taille moyenne. Elle est infinie pour $p > p_c$. Pour $p < p_c$, la fonction $\chi(p)$ se comporte au voisinage de p_c, comme

$$\chi(p) \approx (p_c - p)^{-43/18}.$$

L'exposant négatif traduit bien que cette taille moyenne tend vers l'infini quand p tend vers p_c. Ici encore, l'exposant −43/18 est indépendant du réseau dans le plan.

Probabilité d'avoir un amas infini

Si $p > p_c$, que peut-on dire de la probabilité d'avoir un amas infini, soit un ensemble infini de cases ouvertes dans lequel on peut circuler librement ? Cette probabilité ne peut plus être nulle puisque elle vaut au moins $\theta(p) > 0$. Nous pouvons énumérer les cases de la grille et définir une variable aléatoire de Bernoulli X_n qui vaut 1 si et seulement si la n-ième case est ouverte. Les variables X_n sont indépendantes. La probabilité d'avoir un amas infini dépend de l'ensemble des variables $\{X_n\}$, mais est indépendante de chaque sous-ensemble fini de cet ensemble. Un théorème du grand probabiliste Kolmogorov, appelé *loi du zéro un*, affirme que cette probabilité est nécessairement 0 ou 1. Comme nous avons vu qu'elle vaut au moins $\theta(p) > 0$, elle est égale à 1.

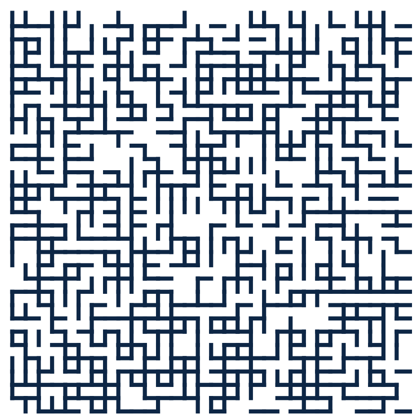
Peut-on avoir plusieurs amas infinis lorsque $p > p_c$? On peut montrer qu'on a probabilité 1 d'avoir un seul amas infini.

Prenons une valeur de p, inférieure à p_c. Nous avons alors probabilité nulle d'un passage vertical dans les cases blanches. Mais, nous avons alors probabilité 1 d'un passage horizontal dans les cases noires. Comme chaque case fermée noire a probabilité $1 - p$, nous avons $1 - p \geq p_c$. Donc, dès que $p < p_c$, on a $p \leq 1 - p_c$, ce qui entraîne que $1 - p_c \geq p_c$, ou encore $p_c \leq 1/2$. De même, en commençant plutôt avec une valeur de p supérieure à p_c, nous avons alors probabilité 1 d'un passage vertical dans les cases blanches, et probabilité 0 d'un passage horizontal dans les cases noires. Nous avons donc $1 - p \leq p_c$. Donc, dès que $p > p_c$, on a $p \geq 1 - p_c$, ce qui entraine que $p_c \geq 1 - p_c$, et $p_c \geq 1/2$. En combinant les deux inégalités, on a finalement

$$p_c = 1/2.$$

La percolation par arêtes

La percolation que nous avons regardée jusqu'à présent est ce qu'on appelle la percolation par site : ce sont les sites (ou cases) qui sont ouverts ou fermés. Revenons à notre grille initiale carrée 20×20. Maintenant, ce ne sont plus les cases que l'on ouvre ou ferme, mais les segments de la grille qui représentent alors des portions de tuyaux. Ici, bien sûr, on connecte les segments par les coins, et on a passage de haut en bas si on a une ligne continue de segments ouverts joignant le haut de la grille au bas de la grille. On parle de percolation par arêtes. Pour ce réseau, la probabilité critique est aussi $p_c = 1/2$. Dans ce cas, la preuve est très difficile. Voici un résultat de percolation pour $p = 0{,}55$. Cherchez un passage.



Que se passe-t-il lorsque $p = p_c$?

La première question est de savoir quelle est la probabilité de passage lorsque $p = p_c$. C'est une question très difficile. La probabilité dans ce cas-ci dépend du type de réseau et de la taille des bords de la frontière entre lesquels on veut percoler.

Cette valeur particulière de p passionne les chercheurs parce qu'on a des propriétés extraordinaires qui sont indépendantes du réseau. On dit que ces propriétés sont universelles. Dans l'encadré *Propriétés universelles*, nous en détaillons deux.

Extraire du pétrole de la roche

Toujours en dimension 3, nous pourrions imaginer que les cases fermées représentent de la roche, et les cases ouvertes des alvéoles remplies de liquide : ce

pourrait être de l'eau lorsqu'on creuse un puits, ou encore du pétrole ou du gaz.

Lorsque $p > p_c$, on a une probabilité 1 d'avoir une cavité infinie et, si le puits l'attrape, il va fonctionner longtemps. Mais on est souvent dans le cas $p < p_c$, ce qui signifie qu'on ne va attraper que de petites poches de liquide et que le puits va rapidement s'épuiser. Les compagnies estiment p_c en analysant des carottes de roches et en extrapolant par des méthodes statistiques. Cependant, l'hypothèse que les cases sont ouvertes ou fermées indépendamment des cases voisines n'est pas vérifiée en pratique, et il y a de la corrélation entre les cases ouvertes. Cela demande d'adapter le modèle de percolation utilisé. C'est parce que souvent $p < p_c$ que les compagnies recourent à la fracturation lorsqu'elles veulent extraire du pétrole et du gaz de schiste.

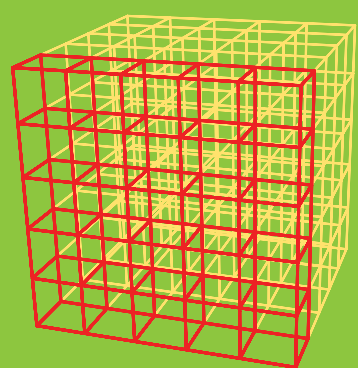
Ajouter le temps

Nous avons regardé la percolation de manière statique, en considérant un matériau avec des cases ouvertes ou fermées. Une question importante est de s'intéresser à la percolation d'un fluide dans un tel matériau : à quelle vitesse se propage-t-il ? Combien de temps cela prend-il avant que la diffusion ne cesse, faute de cases ouvertes à pénétrer ? Ici encore, la probabilité critique joue un rôle. Le temps de diffusion est court lorsque p est grand, parce que le fluide ne rencontre pas d'obstacles. Il est court aussi lorsque p est petit, parce que la diffusion s'arrête rapidement. Ce temps est maximum pour $p = p_c$. Pour cette valeur de p, il tend vers l'infini car le fluide doit faire beaucoup de détours pour remplir tout l'espace disponible. Ces notions sont importantes pour la propagation des feux de forêt, ou la diffusion des polluants dans le sol.

Que se passe-t-il en dimension 3 ?

La probabilité critique existe aussi pour les réseaux en dimension supérieure. Le calcul de la probabilité critique est beaucoup plus difficile. Par contre, il est très facile de se convaincre que la probabilité critique du réseau cubique en dimension 3, que nous noterons $p_c(3)$ pour mettre en évidence la dimension, est inférieure ou égale à celle du réseau carré en dimension 2, notée $p_c(2)$.

En effet, prenons un grand cube $N \times N \times N$ découpé en cubes d'arête unité.



Y a-t-il un passage du haut en bas si chacun des cubes est ouvert avec probabilité p ? Prenons les cubes tangents à un plan vertical. On est ramené au problème plan et on sait que lorsque N tend vers l'infini, la probabilité de passage tend vers 1 dès que $p > p_c(2)$. Sous la même condition, la probabilité de passage tend donc vers 1 pour le grand cube.