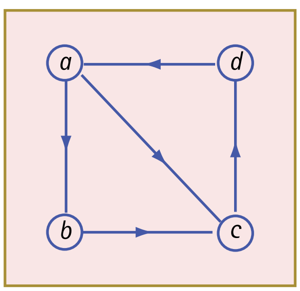
Hiver-printemps 2014
Solutions

Pourquoi Google ?

1. a) Faux. On pourrait penser qu'inverser le sens des liens d'une toile inverse aussi l'ordre des fréquences de visites du promeneur impartial. Il n'en est rien! Un site pourrait avoir beaucoup de flèches entrantes et sortantes. Il restera donc important après inversion des flèches.
En fait il existe même des toiles dont l'inversion des liens ne change pas du tout le comportement asymptotique. En voici un exemple.
Étudions la microtoile suivante.



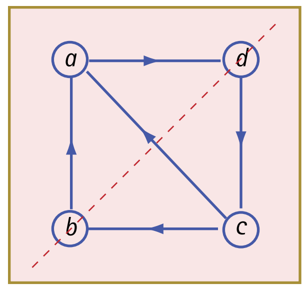
Puisque toute visite du site *c* signifie, à coup sûr, une visite au site *d* puis au site *a* aux deux clics suivants, on conclut que les probabilités asymptotiques seront telles que

$$p_a = p_c = p_d.$$

Notons enfin que, en *a*, le promeneur doit choisir entre *b* et *c* et donc que

$$p_a = p_c = p_d > p_b,$$

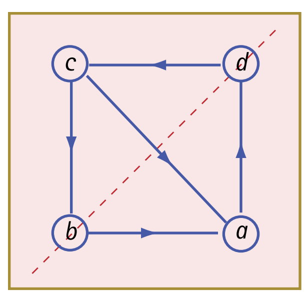
l'inégalité est stricte.
Considérons maintenant la toile suivante.



Notons par la lettre *q* les probabilités asymptotiques de cette toile « inversée ». Le raisonnement précédent, maintenant à partir du site a plutôt que c, mène aux mêmes relations :

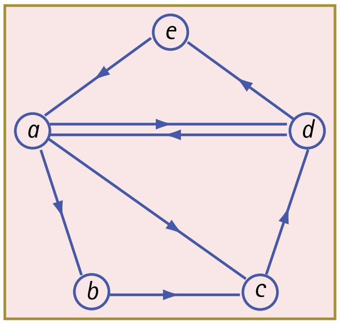
$$p_a = p_c = p_d > p_b.$$

Mais nous pouvons dire plus ! Basculons le dessin de droite le long du pointillé. Les sites *b* et *d* demeurent à leur position initiale, mais les sites *a* et *c* sont échangés.

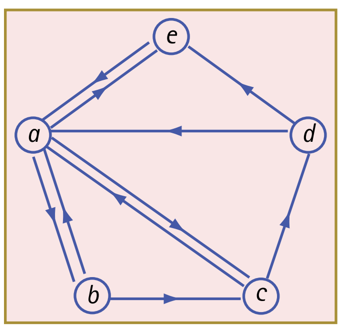


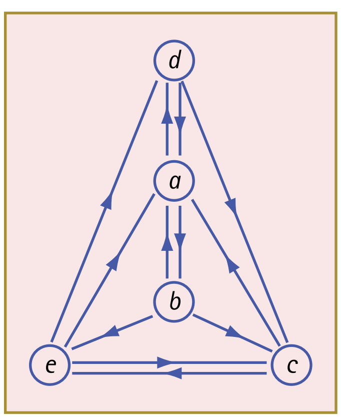
Après cette bascule, les flèches deviennent identiques à celles de la toile de gauche et on conclut que $p_a = q_c$ et $p_b = q_b$. Ainsi, les comportements asymptotiques de ces deux toiles coïncident !

b) Vrai. On ne peut visiter le site *b* sans avoir visité *a* au clic précédent mais, par contre, il peut y avoir plusieurs flèches sortant de *a*, si bien qu'on risque de visiter *a* plus souvent que *b*.

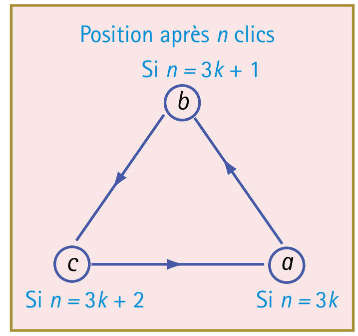


c) Vrai. Supposons que *a* soit le site qui reçoive des liens de tous les autres. Quel que soit le site différent de *a* où l'on se trouve, la probabilité de se retrouver en *a* au clic suivant est au moins égale à la probabilité de se retrouver en n'importe quel autre site.





2. À chaque étape on a un seul choix. Donc, la position du promeneur impartial après *n* clics est complètement déterminée par *n*. Si on part de *a*, on sera en *a* après *n* clics si *n* est divisible par 3. On sera en *b* si le reste de la division de *n* par 3 est 1, et en *c*, si le reste de la division de *n* par 3 est 2.



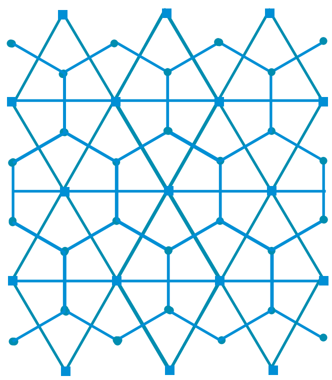
3. En fait, écrire une telle matrice est impossible. Il y a plus de 10^{13} nombres dans la première ligne : écrire cette ligne prendrait donc plus de 10^{12} secondes. Or. une année compte environ $31{,}5 \times 10^6$ secondes, et il faudrait donc environ 31 700 ans pour écrire la première ligne.

Passera, passera pas ?

1. On n'a pas de passage de haut en bas par les cases blanches dans le réseau carré lorsque les passages par les coins sont permis si et seulement si on a un passage de droite à gauche dans les cases noires, sans passage de coin permis. La probabilité critique pour ce cas était $p_c = 0{,}5927$. Donc la probabilité critique de passage de haut en bas par les cases blanches dans le réseau carré lorsque les passages par les coins sont permis est $p_c' = 1 - 0{,}5927 = 0{,}4073$.

2. Remarquons que les sommets des triangles dans le réseau triangulaire sont disposés de la même manière que les centres des cellules hexagonales du réseau hexagonal. Donc, on peut superposer sur le réseau triangulaire un réseau hexagonal, dont les cases hexagonales sont centrées aux sommets des triangles. Alors, on a passage de haut en bas dans le réseau triangulaire par arêtes si et seulement si

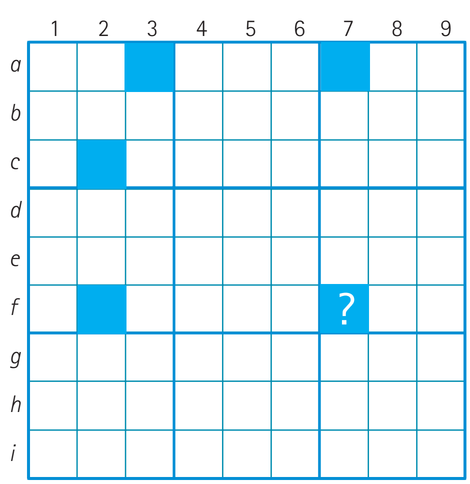
on a passage de haut en bas dans le réseau hexagonal par sites. On sait que la probabilité critique pour ce dernier cas est $p_c = 1/2$. Donc, c'est aussi la probabilité critique pour le réseau triangulaire par arêtes.



Sudoku

Il s'agit d'un raisonnement semblable à celui de l'exclusion du Jedi. En effet, considérons les cases *a*3, *a*7, *c*2 et *f*2.

- Si le 6 est en *a*3, il ne peut être en *c*2. Dans la colonne 2, il doit donc être en *f*2. Il ne peut alors être dans une autre case de la rangée *f*, et, en particulier, il ne peut être en *f*7.
- Si le 6 est en *c*2, il ne peut être en *a*3. Dans la rangée *a*, il doit donc être en *a*7. Il ne peut alors être dans une autre case de la colonne 7, et en particulier il ne peut être en *f*7.
- Si le 6 n'est ni en *a*3, ni en *c*2, alors il est en *a*7 et en *f*2 et il ne peut donc être en *f*7.



Galaxies

Ce problème, auquel on réfère parfois comme étant le paradoxe des anniversaires, se résout assez simplement.

La probabilité qu'une autre personne ait la même date anniversaire que vous est d'environ 1/365, et il y a donc une probabilité d'environ 364/365 pour que vos dates anniversaires soient différentes. Il y a bien sûr des années bissextiles, des jours avec plus de naissances que d'autres, mais c'est une excellente approximation. Si il y a 49 autres personnes dans l'autobus, la probabilité pour que personne n'ait la même date anniversaire que vous est donc $(364/365)^{49}$, ce qui donne environ 0,874. Il y a donc environ 1 – 0,874 = 0,126, soit 13% des chances qu'une autre personne ait la même date anniversaire que vous.

Par contre, la probabilité que personne n'ait la même date anniversaire est beaucoup plus petite. En effet, la probabilité est alors

$$\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\ldots\times\frac{316}{365}$$

En effet, il y a 365 choix possibles sur 365 pour le premier passager, mais il n'en reste que 364 sur 365 pour le deuxième, et ainsi de suite, avec finalement 316 dates possibles sur 365 pour le dernier. Et la valeur de ce produit est moins de 0,03. Il y a donc 1– 0,03 = 0,97, soit plus de 97% des chances pour que deux passagers aient la même date anniversaire.