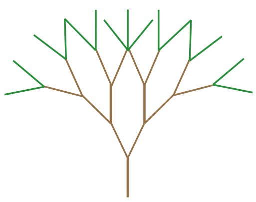
Section problèmes



Modélisation des glaciers

Calculer la hausse moyenne du niveau de la mer si toute la glace de l'Antarctique fondait et si l'eau de fonte était répartie uniformément sur la surface des océans en utilisant les données suivantes : La calotte Antarctique actuelle a une superficie de 14 000 000 km^2 et mesure en moyenne 2 km d'épaisseur; par ailleurs, la Terre peut-être considérée comme une sphère de rayon 6 371 km dont 70 % de sa surface est couverte par les océans; finalement, l'eau étant plus dense que la glace, 1 m^3 de glace fondue génère 0,9 m^3 d'eau.

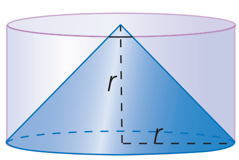
L-systèmes

Montrer que si $a(n)$ est le nombre d'instructions à l'étape n, alors on a la formule de récurrence :

$$a(n+1) = a(n) + 8\times 2^n.$$

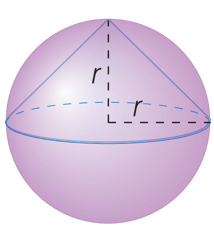
De manière générale, montrer que :

$$a(n) = 2^{n+3} - 7.$$



Regard archimédien

1. *Simple comme 1 – 2 – 3.* Étant donné un cercle de rayon r, on peut envisager plusieurs solides de hauteur r ayant ce cercle pour base. Parmi eux se trouvent le cône et le cylindre, dont le rapport des volumes est 1 : 3. Trouver un troisième solide « chouette » de même base et même hauteur venant se glisser entre les deux, de sorte que le rapport des volumes des trois solides soit 1 : 2 : 3.
2. On a cité à la p. 35 un extrait du texte dans lequel Archimède exprime l'analogie qu'il fait entre l'aire d'un cercle et d'un certain triangle, d'une part, et le volume d'une sphère et d'un certain cône, d'autre part. Voici le passage entier où le grand Syracusain tient ces propos :



Considérant que toute sphère est quadruple du cône dont la base est égale au plus grand cercle et la hauteur égale au rayon de la sphère, j'ai conçu que la surface de toute sphère équivaut à quatre de ses plus grands cercles; car j'avais eu l'intuition que, puisque tout cercle équivaut au triangle dont la base est égale à la circonférence du cercle et la hauteur égale au rayon, toute sphère équivaut au cône dont la base est équivalente à la surface de la sphère, et dont la hauteur est égale à son rayon.[1]

a) Dans ce passage, Archimède vise à établir un certain résultat. Lequel ?

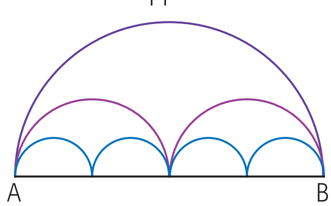
b) L'argument utilisé ici par Archimède repose sur deux résultats énoncés explicitement dans son texte, l'un qu'il a démontré à la proposition 2 du traité *La méthode* (qui précède ce passage), et l'autre qu'il accepte par analogie. Quels sont ces résultats ?

c) Montrer comment la conclusion d'Archimède découle de ces deux résultats.

3. On a évoqué (p. 35) le fait que les « passages à la limite » peuvent parfois soulever des difficultés. Voici une autre situation du même acabit.

   Soit un demi-cercle de rayon 1 et de diamètre AB. On peut se rendre de A à B le long de ce demi-cercle – il s'agit d'un trajet de longueur π. Mais on peut aussi aller le long d'un premier demi-cercle reliant A au milieu de AB, puis d'un autre demi-cercle allant de ce point milieu à B – quelle est la longueur de ce nouveau trajet? Ou encore le long de quatre demi-cercles dont les diamètres respectifs mesurent le quart de AB. Et ainsi de suite.

   Quelle difficulté va apparaître « à la limite » ?



1. *Archimède,* La méthode. *Voir Paul Ver Eecke,* Les œuvres complètes d'Archimède, *tome II (p. 488). Liège, Vaillant-Carmanne, 1960.*