Section problèmes

Mathématiques du cœur

Modélisation du débit sanguin (collégial)

t	$Q(t)$
0	0
1	0
2	0
3	0
4	5
5	5
6	5
7	5
8	5
9	0
0	0
11	0
12	0
13	5
14	5
15	5
16	5
17	5
18	0
19	0
20	0

On modélise souvent le débit sanguin par une fonction constante par morceaux, c'est-à-dire nulle pendant la diastole et égale à une même constante positive pendant la systole. On peut alors montrer que la solution pour la pression est une fonction exponentielle par morceaux. Faites-en la vérification numérique en simulant, avec $C = 4$, $R = 1$, $P(t_0) = 4$ et $dt = 1$, la pression que génère le débit $Q(t)$ décrit par le tableau ci-contre. Vous devriez obtenir une fonction périodique dont la première période se définit :

$P_1(t) = A_1e^{-t/RC}$, si $0 \le t < 4$

$P_2(t) = A_2e^{-t/RC} + 5R$, si $4 \le t < 9$

a) À partir du graphique généré par la simulation, estimer la valeur des paramètres A_1 et A_2.

b) Montrer (en dérivant) qu'à l'intérieur de l'intervalle où elles sont définies, les fonctions $P_1(t)$ et $P_2(t)$ satisfont bien l'équation du modèle Windkessel.

c) Pour que la fonction pression soit une fonction continue et périodique, il faut que :

$$P_1(4) = P_2(4) \text{ et } P_1(0) = P_2(9)$$

Résoudre ce système pour trouver les valeurs exactes de A_1 et A_2. Votre estimation en *a)* s'en approchait-elle? Les graphiques des solutions analytique et numérique pour la fonction pression coïncident-ils?

Polyèdres (secondaire)

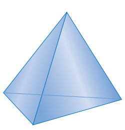
Formule d'Euler

Pour tout polyèdre, la relation entre *S*, le nombre de sommets, *A*, le nombre d'arêtes, et *F*, le nombre de faces, est :

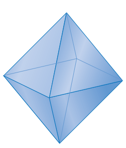
$$S - A + F = 2.$$

Dans l'article *Fullerènes et polyèdres*, nous avons vérifié cette formule dans le cas du cube (hexaèdre).

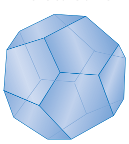
Vérifier cette formule pour les autres corps réguliers de Platon représentés ci-contre.



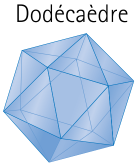
Tétraèdre



Octaèdre



Dodécaèdre



Icosaèdre

Loi de Descartes

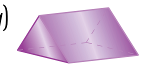
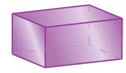
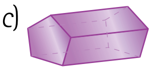
Pour tout polyèdre, la somme des manques à chaque sommet est 4π.

Dans l'article *Fullerènes et polyèdres*, nous avons vérifié cette loi de Descartes pour le cube.

Vérifier que la loi de Descartes s'applique aux polyèdres réguliers donnés dans l'exercice précédent.

Les prismes

Vérifier que la formule d'Euler et la loi de Descartes s'appliquent aux prismes suivants dont les sections perpendiculaires aux côtés latéraux sont des polygones réguliers :

a)  *b)*  *c)* 

d) En vous inspirant des résultats obtenus en *a*, *b* et *c*, vérifier que la formule d'Euler et la loi de Descartes s'appliquent à un prisme *n*-angulaire.

Les polyèdres (collégial)

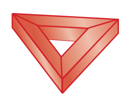
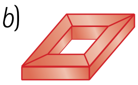
Soit des polyèdres dont chacun des sommets appartient à trois polygones. Soit F_n le nombre de faces à *n* arêtes d'un tel polyèdre. Montrer que :

a) $\sum_n F_n(6-n)=12$

b) Dans le cas particulier où le polyèdre a seulement des faces carrées ou hexagonales, en déduire que le nombre de faces carrées est exactement 6.

Les solides troués (secondaire)

Calculer $S - A + F$ pour les solides suivants.

a)  *b)* 

Les nombres complexes (secondaire)

Les nombres complexes sont définis par :

$$\mathbb{C}=\{a+bi \mid a \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$$

Dans les opérations, les nombres complexes se comportent comme des binômes $(a + bx)$, à la différence que $i^2 = -1$. Une opération est complétée lorsque le résultat est donné sous la forme $a + bi$. Effectuer les opérations suivantes :

a) $(2 - 3i) + (-5 + 2i)$ *b)* $(2 - 3i) \times (-5 + 2i)$

c) $\dfrac{1}{3-2i}$ *d)* $\dfrac{5+3i}{3-2i}$

e) Un nombre complexe $a + bi$ est représenté graphiquement par un vecteur. Montrer qu'en le multipliant par i, ce vecteur subit une rotation de $\pi/2$ rad.

f) Dans le système d'axes de la figure suivante sont représentés les nombres 1 et i. Représenter les nombres i^2, i^3, i^4, ...