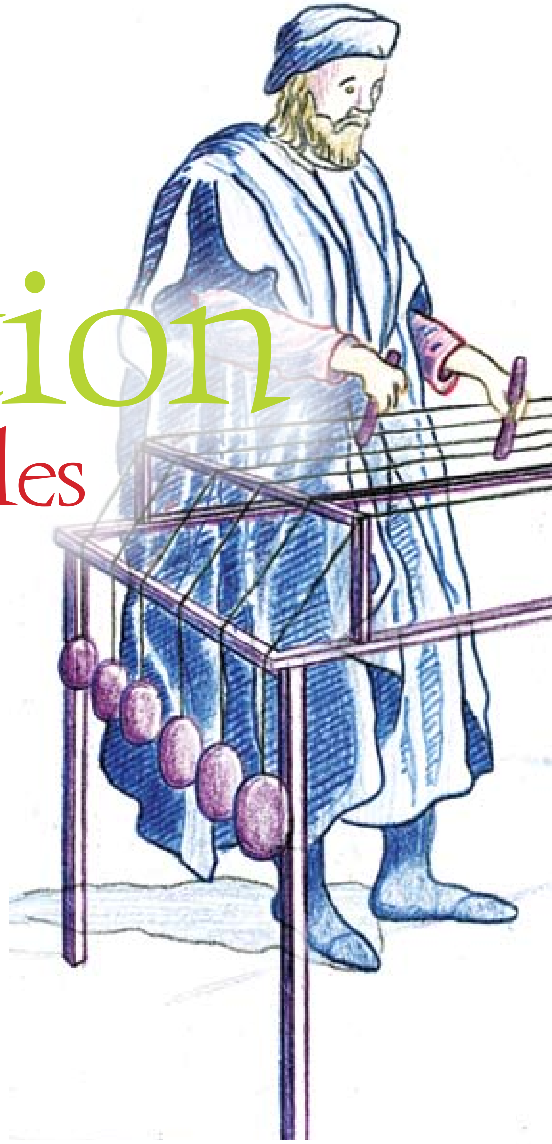
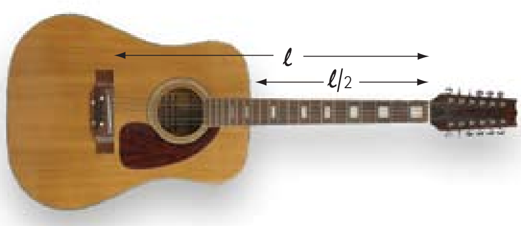
La construction des gammes musicales



L'histoire dit que Pythagore s'amusait à faire vibrer des cordes de différentes longueurs et de différentes tensions pour étudier les rapports des sons entre eux. On peut faire la même expérience sur une guitare.

Serge Robert
Cégep
Saint-Jean-sur-Richelieu

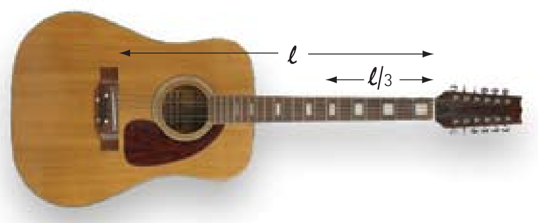
Lorsqu'on fait vibrer une corde de guitare, plus la partie vibrante est longue, plus le son est bas et, vice versa, plus elle est courte, plus le son est aigu. Si on appuie sur une corde à la 12e case, le son entendu sera à l'octave du son de la corde à vide; il aura une fréquence deux fois plus élevée. Bien entendu, Pythagore ne connaissait pas la physique comme vous ; la notion de fréquence lui était inconnue, mais il savait sûrement reconnaître quand un son était à l'octave d'un autre son.



Ainsi, deux sons sont à l'octave l'un de l'autre si le rapport de leurs fréquences est égal à deux :

Octave: $\dfrac{f_2}{f_1} = 2$.

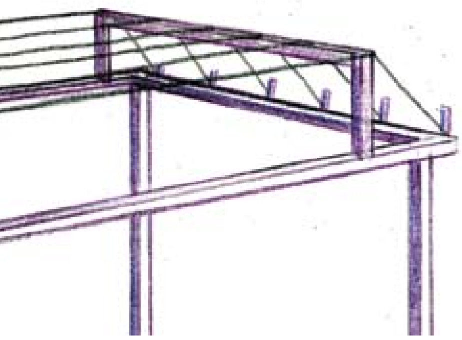
Si on effleure avec la main gauche une corde de guitare à la septième case sans appuyer la corde sur la frette, on obtiendra un son vaporeux, appelé harmonique, dont la fréquence est trois fois plus élevée que la note fondamentale de la corde. La septième frette est située à peu près au tiers de la longueur de la corde. Nous verrons plus loin pourquoi ce n'est pas exactement le tiers. Le fait d'effleurer cette corde l'oblige à vibrer comme si on avait appuyé au tiers de la longueur de la corde vibrante.



On raconte que Pythagore en avait déduit que la hauteur d'un son, qui pour nous correspond à la fréquence f, est inversement proportionnelle à la longueur ℓ de la corde :

$$f \propto \frac{1}{\ell}.$$

La cinquième corde d'une guitare en partant de la corde la plus aiguë est un *la*. Si, avec la main droite, on pince cette corde et qu'avec



un doigt de la main gauche on l'effleure à peu près au-dessus de la septième frette, on entendra un *mi* qui sera à peu près le même que celui de la première corde à vide (sans appuyer sur la corde). Ce *mi* est dans un rapport de 3/2 avec le *la* obtenu à la deuxième case de la troisième corde. Ce rapport harmonique était connu des Grecs et est largement utilisé dans toutes les musiques, c'est la quinte.

On dit que deux sons sont à la quinte l'un de l'autre si le rapport de leurs fréquences est égal à 3/2.

Quinte: $$\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$$

Leonhard Euler, qui vécut de 1707 à 1783, s'intéressa lui aussi à la musique et en vint à la conclusion que le rapport harmonique que font deux sons entre eux sont d'autant plus agréables à l'oreille que le rapport des fréquences s'exprime avec de petits nombres entiers. Pythagore aimait tellement les quintes qu'il construisit toute une gamme en prenant les quintes successives d'une note de départ. Par exemple, si nous partons avec un *do*, la quinte du *do* est un *sol*; la quinte de ce *sol* est un *ré*.

Soit do^1 le *do* de la première octave; sa quinte est sol^1 :

$$sol^1 = \frac{3}{2} \times do^1.$$

La quinte de ce *sol* est le $ré^2$ (le *ré* de la seconde octave) :

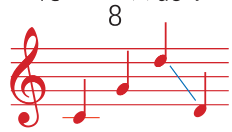
$$ré^2 = \frac{3}{2} \times sol^1 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times do^1 = \frac{9}{4} \times do^1.$$

La fréquence

Un son se propage dans l'air comme des vagues dans l'eau; le haut de la vague représente une pression de l'air plus élevée et le creux de la vague, une pression plus basse. Le changement périodique de la pression de l'air produit le son dans nos oreilles; le nombre de fois par seconde que cela se répète s'appelle la fréquence du son. Par exemple, un diapason en *la* donne un son de fréquence 440. L'unité de fréquence est le hertz (Hz) et correspond à un battement par seconde.

Ce *ré* étant plus haut que l'octave du *do* initial, nous pouvons diviser sa fréquence par deux afin de rester à l'intérieur d'une octave :

$$ré^1 = \frac{9}{8} \times do^1.$$



Ce rapport de 9/8 s'appelle un ton majeur.

Si maintenant nous continuons avec ce $ré^1$, la quinte de *ré* étant *la*, nous obtenons :

$$la^1 = \frac{3}{2} \times ré^1 = \frac{3}{2} \times \frac{9}{8} \times do^1 = \frac{27}{16} \times do^1.$$

La quinte de ce *la* sera un mi^2 et, divisant sa fréquence par deux toujours afin de rester dans l'octave initiale, ceci nous donnera :

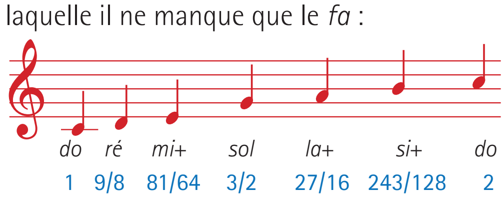
$$mi^2 = \frac{3}{2} \times la^1 = \frac{3}{2} \times \frac{27}{16} \times do^1 = \frac{81}{32} \times do^1,$$

et $mi^1 = \dfrac{81}{64} \times do^1.$

Les fractions deviennent de plus en plus compliquées :

$$si^1 = \frac{3}{2} \times mi^1 = \frac{3}{2} \times \frac{81}{64} \times do^1 = \frac{243}{128} \times do^1.$$

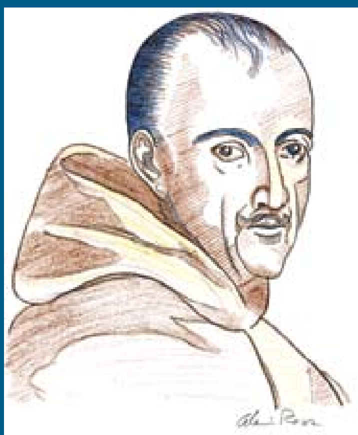
On arrive donc à la gamme suivante, dans laquelle il ne manque que le *fa* :



Les + sont là pour indiquer que ces notes sont plus hautes que les harmoniques naturelles, que nous verrons un peu plus loin.

Marin Mersenne

1588-1648



Le père Marin Mersenne, savant et philosophe français, fut l'un des premiers à utiliser un laboratoire et à y faire des expériences. Il a correspondu avec tous les savants et philosophes de son époque, contribuant ainsi à faire connaître les découvertes et à favoriser les échanges d'idées entre les savants. Cette correspondance a joué un rôle important durant cette période, car les revues scientifiques n'existaient pas encore. À sa mort, on découvrit dans sa cellule des lettres de 78 correspondants incluant Fermat, Huygens, Pell, Galilée et Torricelli.

Extrêmement soucieux de précision, il a inlassablement prôné la prudence dans les procédures expérimentales, la répétition des expériences et la publication des résultats numériques. Ses pôles d'intérêt couvraient de nombreux domaines scientifiques, mais sa passion fut l'acoustique. Dans deux travaux publiés en 1634, les *Questions harmoniques* et *Les préludes de l'harmonie universelle*, il fit une analyse scientifique du son et de ses effets sur l'oreille et l'âme.

C'est lui qui a trouvé la formule reliant les différents paramètres de la corde vibrante :

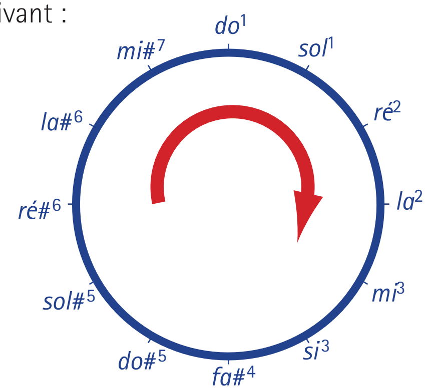
$$f = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

- T est la tension dans la corde; plus celle-ci augmente, plus la note est aiguë;
- ℓ est la longueur de la corde; plus elle est petite, plus la note est aiguë;
- ρ est la densité linéaire de la corde; plus la corde est grosse (massive), plus la note est basse.

Par exemple, sur une guitare, on varie la longueur de la corde vibrante en appuyant en différents endroits sur la corde; la tension dans les cordes est ajustée à l'aide des clés mécaniques et les cordes sont de densités différentes.

Il fallut attendre le XVIIIe siècle avant d'avoir une démonstration mathématique de la formule de Mersenne; de grands mathématiciens comme Euler, d'Alembert, Bernoulli et Lagrange la démontrèrent en utilisant le calcul différentiel et intégral.

Si on prend les quintes successives d'une note de base, on obtient le cycle des quintes suivant :



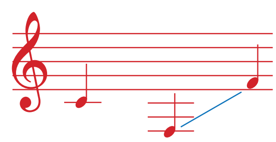
Cycle des quintes

On voit qu'il faudrait prendre 11 quintes successives pour obtenir le *fa* et, en fait, le *mi* dièse ne donnera pas exactement le *fa*; il serait égal à :

$$mi\,\#^1 = \frac{1}{2^6}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{11}\times do^1 = \frac{3^{11}}{2^{17}}\times do^1.$$

Un peu trop compliqué comme fraction ! On essaie donc de construire le *fa* en utilisant les quintes descendantes. La quinte inférieure de do^1 est justement un *fa* :

$$\frac{do^1}{fa^0} = \frac{3}{2},\quad fa^0 = \frac{2}{3}\times do^1 \text{ et } fa^1 = \frac{4}{3}\times do^1.$$



On se trouve donc en face d'un nouveau rapport harmonique d'expression très simple, c'est la quarte :

Quarte: $\dfrac{f_2}{f_1} = \dfrac{4}{3}.$

Ce rapport harmonique est l'inverse de la quinte puisque ces deux intervalles superposés donnent l'octave ; la quarte au-dessus de la quinte est : $\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{2}\times do^1 = 2do^1.$

De même pour la quinte au-dessus de la quarte : $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times do^1 = 2do^1.$

Nous avons donc une gamme complète de sept sons couvrant une octave : c'est la gamme de Pythagore.

do *ré* *mi+* *fa* *sol* *la+* *si+* *do*

1 9/8 81/64 4/3 3/2 27/16 243/128 2

Gamme de Pythagore

Cette gamme comprend trois notes beaucoup trop complexes pour que leur rapport au *do* initial soit agréable à l'oreille : le *mi+*, le *la+* et le *si+*, ce dernier étant sans contredit le pire. L'intervalle de *si+* à *do* est ce que l'on appelle le limma pythagoricien :

$$\frac{do^2}{si+^1} = \text{limma}_\pi = \frac{256}{243}.$$

La seule véritable façon d'entendre cette gamme consiste à programmer un ordinateur ou un synthétiseur. Aucun instrumentiste ne peut arriver à jouer ces notes parfaitement, d'autant plus que la plupart des instruments modernes sont incapables de jouer d'autres gammes que la tempérée (que nous verrons plus loin). Il n'y a donc pratiquement que les violonistes qui pourraient arriver à jouer une gamme de Pythagore, mais comme nous allons le voir à la prochaine section, la gamme la plus naturelle est celle qui fait appel, en plus des quintes, aux autres harmoniques.

do *ré* *mi+* *fa* *sol* *la+* *si+* *do*

1 9/8 81/64 4/3 3/2 27/16 243/128 2

9/8 9/8 256/243 9/8 9/8 9/8 256/243

Rapports dans la gamme de Pythagore

La gamme de Pythagore est composée de deux tétracordes (suites de quatre notes) identiques séparés entre eux par un ton majeur, ce qui en fait une gamme extrêmement symétrique, sans nul doute sa principale qualité.

La gamme de Zarlino

Un compositeur italien, Gioseffo Zarlino (1519-1590), construisit une gamme, plus simple que celle de Pythagore, en se basant uniquement sur les harmoniques naturelles, c'est-à-dire les notes dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence de la note de base. Si f_0 est la fréquence de cette note, la n^e harmonique aura une fréquence :

$$f_n = (n+1) \times f_0.$$

1. La première harmonique est l'octave :
$$f_1 = 2 \times f_0;\ \frac{f_1}{f_0} = 2.$$
2. La deuxième harmonique est la quinte au-dessus de l'octave :
$$f_2 = 3f_0;\ \frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}.$$
3. La troisième harmonique, la deuxième octave de la fondamentale :
$$f_3 = 4f_0;\ \frac{f_3}{f_0} = 4 = 2^2.$$
La troisième harmonique est à la quarte de la deuxième harmonique :
$$\frac{f_3}{f_2} = \frac{4f_0}{3f_0} = \frac{4}{3}.$$
4. La quatrième harmonique va créer un nouveau rapport harmonique :
$$f_4 = 5 \times f_0.$$

Le rapport entre la quatrième et la troisième harmonique nous donne une autre fraction simple : $\frac{f_4}{f_3} = \frac{5}{4}.$

Ce rapport harmonique s'appelle la tierce majeure.

Tierce majeure : $\frac{f_2}{f_1} = \frac{5}{4}.$

Par exemple, si la note fondamentale est un *do*, nous obtenons les harmoniques suivantes :

La tierce majeure est très importante puisqu'elle définit l'accord majeur : *do - mi - sol*, qui est à la base de toute l'harmonie classique.

Si on définit le *la* comme étant la quarte au-dessus du *mi*, on obtiendra :

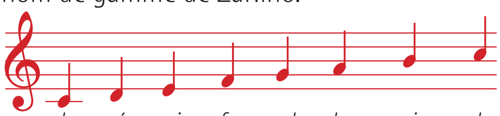
$$la = \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times f_0 = \frac{5}{3} \times f_0.$$

Dans la gamme de Zarlino le *ré* et le *fa* s'obtiennent de la même façon que dans la gamme de Pythagore.

Et, pour terminer cette gamme, il reste à trouver le *si* ; il suffit de prendre la quinte du *mi* :

$$si = \frac{3}{2} \times mi = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times f_0 = \frac{15}{8} \times f_0.$$

Nous obtenons ainsi une gamme complète, beaucoup plus simple que celle de Pythagore ; basée sur les quatre rapports harmoniques engendrés par les quatre premières harmoniques d'un son : l'octave, la quinte, la quarte et la tierce majeure. Cette gamme porte le nom de gamme de Zarlino.



Gamme de Zarlino

Cette gamme se généralisa dans toute la musique occidentale à partir de la Renaissance. Malheureusement, son architecture n'est pas aussi symétrique que celle de la gamme de Pythagore. Elle est constituée de trois tons majeurs (9/8), deux tons mineurs (10/9) et de deux demi-tons majeurs (16/15).

Rapports dans la gamme de Zarlino

Problèmes de la gamme de Zarlino

Les quintes de la gamme de Zarlino ne sont pas toutes justes; par exemple, la quinte *ré-la* :

$$\frac{la}{ré} = \frac{5/3}{9/8} = \frac{5}{3} \times \frac{8}{9} = \frac{40}{27} = 1,4815... < 1,5.$$

Ce rapport est plus petit que 3/2. En fait, comme on l'a vu dans la gamme de Pythagore, pour que la quinte soit juste, il faut aller chercher le *la+*, 27/16. Les autres quintes, *do-sol*, *mi-si*, *fa-do* sont exactes.

Le second problème rencontré avec l'utilisation de cette gamme fut la modulation. Même si une pièce est écrite en *do* majeur, les musiciens ne jouent pas toute la pièce dans cette tonalité ; ce serait comme peindre toute une toile uniquement avec une couleur. Les changements de tonalité s'appellent des modulations. Par exemple, on commence une pièce en *do* majeur, on s'en va ensuite à la quinte en jouant en *sol* majeur ; le problème c'est que les notes de la gamme de *do* ne donnent pas exactement la gamme de Zarlino construite sur le *sol*.

Par exemple, dans la gamme de *do*, l'accord majeur est *do-mi-sol*, ce qui représente les rapports 1 – 5/4 – 3/2, tandis que l'accord de *ré* majeur, *ré-fa#-la*, qui correspond aux rapports 9/8 – 45/32 – 5/3, n'est pas le même accord puisque les rapports entre ces notes sont 1 – 5/4 – 40/27. Un instrument accordé en *do* sonne légèrement faux si on joue en *ré*, et ainsi de suite.

La gamme tempérée

Pour remédier à tous ces problèmes d'intonation, les théoriciens de la musique ont essayé longtemps de trouver une solution. De nombreuses solutions avaient été proposées, entre autres par Kepler et Euler, mais elles demeuraient insatisfaisantes puisque certaines modulations étaient toujours impossibles. C'est un mathématicien flamand, Simon Stevin, qui le premier accorda un monocorde en tempérament égal, c'est-à-dire une gamme composée de douze demi-tons exactement égaux. C'est ce qu'on appele la gamme tempérée. Évidemment, cela s'appliquait surtout aux instruments qui jouent des notes fixes comme le clavecin, l'orgue, la guitare, etc., mais non aux instruments de la famille du violon, ni au luth, sur lequel les frettes ne sont que des cordes que l'on peut bouger.

Simon Stevin

1548-1620

Simon Stevin est né à Bruges en 1548, mais il passa la majeure partie de sa vie aux Pays-Bas, où il mourut en 1620. Comme plusieurs mathématiciens de son époque, il s'intéressait à toutes sortes de sujets. Contemporain de Galilée, il a, tout comme celui-ci, contribué à la naissance d'une nouvelle discipline scientifique, la mécanique. Avec Rheticus et Kepler, il fut l'un des premiers à publier une défense du système copernicien. Il a entre autres publié un volume de géométrie, *Problematum geometricum*, un *Pratique d'arithmétique* et son célèbre *Statique*. Finalement, il a écrit un livre sur la musique, bien qu'il n'emploie pas le mot musique mais plutôt le terme chanter, *Vande spiegheling der singconst*, « Sur la théorie de l'art de chanter »; cet ouvrage, dans lequel il expose sa façon de construire la gamme tempérée, est resté un manuscrit jusqu'à sa parution à Amsterdam en 1884.

La gamme tempérée fut adoptée dans le nord de l'Allemagne dès le XVIIe siècle, et on l'entendit pour la première fois sur l'orgue construit par Arp Schnitger à Hamburg en 1692. C'est pourquoi Bach pouvait se permettre dans ses pièces pour orgue de moduler dans des tonalités très éloignées, même si cela gênait la concentration des fidèles.

Bach adapta ce système à tous ses instruments à clavier : clavecin, épinette, clavicorde et orgue. Il donna ses lettres de noblesse à ce système en composant deux séries de 24 préludes et fugues dans tous les tons, montrant ainsi ce que l'on pouvait faire avec un clavier bien tempéré[1].

Mathématiquement, la gamme tempérée est telle que si f_0, f_1, f_2, ..., f_{11} sont les fréquences des douze demi-tons de la gamme, alors :

$$\frac{f_1}{f_0}=\frac{f_2}{f_1}=\frac{f_3}{f_2}=\ldots=\frac{f_{11}}{f_{10}}.$$

Si ε représente ce rapport commun, alors :

$$\frac{f_1}{f_0}\times\frac{f_2}{f_1}\times\frac{f_3}{f_2}\times\ldots\times\frac{f_{11}}{f_{10}}\times\frac{f_{12}}{f_{11}}=\frac{f_{12}}{f_0}=2;$$

$$\varepsilon^{12}=2;$$

$$\varepsilon=\sqrt[12]{2}=2^{1/12}=1{,}059463094\ldots$$

Comme ce rapport est un nombre irrationnel, il ne correspond pas à un rapport harmonique naturel. En fait, aucun rapport dans cette gamme n'est harmonique, sauf évidemment l'octave. Par exemple, la quinte *do-sol* est égale à ε^7 puisqu'il faut sept demi-tons pour aller à la quinte :

do – do# – ré – ré# – mi – fa – fa# – sol.

Et ce nombre est aussi un nombre irrationnel, comme toutes les puissances de ε. En fait,

$$\varepsilon^7=1{,}498307073\ldots$$

La différence entre cette quinte tempérée et la quinte harmonique peut ne pas sembler grande, mais si on calcule les fréquences à partir du *do* 256, cela donne une fréquence de 383,57 pour la quinte tempérée et 384 pour la quinte harmonique. Si deux cordes d'un piano accordées selon ces deux fréquences vibraient ensemble, nous entendrions une oscillation dans l'intensité du son obtenu ; on appelle ça des battements. Ici, nous aurions 0,43 battements par seconde, donc un *battement* par deux secondes environ. Cela n'est pas trop gênant. Mais si on refait les mêmes calculs à partir du *la* 440, on obtient environ un battement par seconde, ce qui dérange un peu plus.

Dans la gamme tempérée, aucun rapport n'est harmonique sauf l'octave; les dièses et les bémols sont identiques. La tonalité de *ré* majeur, par exemple, n'est qu'une translation de *do* majeur, etc.

Le triton, «Diabolus in musica»

Les rapports de tierce majeure (5/4) et de tierce mineure (6/5) furent considérés, à partir de la Renaissance, comme consonants; de même pour leurs inverses respectifs, la sixte mineure (8/5) et la sixte majeure (5/3), qui apparaissent lors des renversements des accords majeurs et mineurs. Mais le rapport qui fut longtemps considéré comme étant le plus dissonant est le triton ou quarte augmentée: l'intervalle *do-fa#* (45/32). Il était nommé *Diabolus in musica* et représentait le diable. Toute la musique de Bach est truffée de symboles musicaux que les auditeurs de l'époque savaient décoder. Par exemple, une descente aux enfers pouvait être représentée par une descente chromatique (un demi-ton à la fois) et la rencontre avec le diable, par le triton.

Le triton est composé de six demi-tons (de do à *fa#*, par exemple) : c'est le milieu géométrique de la gamme tempérée:

$$\varepsilon^6=(\sqrt[12]{2})^6=2^{6/12}=2^{1/2}=\sqrt{2}.$$

Nous voyons donc le diable : $\sqrt{2}$! Pythagore serait d'accord.

1. *Plusieurs musicologues contestent aujourd'hui cette thèse en se basant entre autres sur les fioritures que Bach a ajoutées au titre de ces œuvres.*

Quels sont les instruments qui utilisent la gamme tempérée?

Presque tous les instruments de musique sont accordés selon la gamme tempérée. C'est le cas pour tous ceux dont les notes sont fixées par le fabricant : piano, guitare, flûte traversière, clarinette, etc.

Les instruments dont les notes ne sont pas déterminées d'avance auront tendance à jouer la gamme de Zarlino, privilégiant ainsi les harmoniques naturelles : toute la famille du violon, la voix humaine, le trombone, la trompette sans piston; certains synthétiseurs offrent la possibilité d'utiliser différents tempéraments, certains clavecinistes, dans un souci d'authenticité, font accorder leur instrument selon les tempéraments d'époque.