

Pourquoi démontrer ce qui est évident?

Yannick remet en question l'exigence de démontrer des « propriétés » qui lui semblent évidentes.



Copyright © Images.com/Corbis

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Yannick

Bonjour Alexandra. J'aimerais que tu m'expliques pourquoi en mathématiques il faut parfois démontrer des propriétés qui sont évidentes?

Alexandra

Bonjour vous deux. Qu'est-ce que tu entends par « propriétés évidentes »?

Yannick

Il ne me vient pas d'exemple à l'esprit, mais je suis sûr que tu en connais.

Annick

Moi, je trouve qu'on n'a pas vérifié beaucoup de cas pour conclure que cela est toujours vrai.

Alexandra

Combien de cas faudrait-il vérifier pour avoir une certitude?

Yannick

Si on vérifie encore une trentaine de cas et que c'est encore vrai, il me semble évident qu'on pourra conclure que c'est toujours vrai.

Alexandra

Je vous propose un exercice. Vérifiez chacun quinze cas et nous en reparlerons demain à la lumière de vos résultats.

Le lendemain

Yannick

On a vérifié chacun quinze autres cas. J'ai vérifié pour les nombres de 29 à 55 et Annick a vérifié ceux de 57 à 83. On a tous pu les exprimer comme la somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier.

C'est exactement ce que je veux dire par propriété évidente. Il

Vérifications
par Yannick

Nombre	Somme
3	$2^1 + 1$
5	$2^1 + 3$
7	$2^1 + 5$
9	$2^2 + 5$
11	$2^3 + 3$
13	$2^3 + 5$
15	$2^3 + 7$
17	$2^2 + 13$
19	$2^4 + 3$
21	$2^4 + 5$
23	$2^4 + 7$
25	$2^3 + 17$
27	$2^4 + 11$

Alexandra

Quelque chose qui semble évident? Supposons que j'écrive les nombres impairs dans une colonne à partir de 3. Dans une deuxième colonne, j'exprime ces nombres comme suit :

$$3 = 2^1 + 1, 5 = 2^1 + 3, \dots$$

Qu'est-ce que vous remarquez dans ce tableau?

Annick

Dans la colonne de droite, on a toujours la somme d'une puissance de 2 et d'un nombre premier.

Alexandra

Belle observation! Pensez-vous qu'il y a d'autres nombres impairs qui peuvent s'écrire de cette façon?

Yannick

Je dirais que cela est possible pour tous les nombres impairs.

Nombre	Somme
29	$2^4 + 13$
31	$2^3 + 23$
33	$2^4 + 17$
35	$2^5 + 3$
37	$2^5 + 5$
39	$2^5 + 7$
41	$2^2 + 37$
43	$2^5 + 11$
45	$2^5 + 13$
47	$2^4 + 31$
49	$2^5 + 17$

Vérifications
par Yannick

Nombre	Somme
51	$2^5 + 19$
53	$2^4 + 37$
55	$2^3 + 47$
57	$2^4 + 41$
59	$2^4 + 43$
61	$2^5 + 29$
63	$2^5 + 31$
65	$2^2 + 61$
67	$2^6 + 3$
69	$2^6 + 5$
71	$2^6 + 7$
73	$2^5 + 41$
75	$2^5 + 43$
77	$2^4 + 61$
79	$2^5 + 47$
81	$2^6 + 17$
83	$2^6 + 19$

est bien évident qu'il sera toujours possible de décomposer un nombre impair en une telle somme.

Alexandra

Toi, Yannick, en es-tu convaincue aussi?

Annick

C'est difficile d'imaginer qu'il soit impossible d'exprimer un nombre impair sous cette forme.

Alexandra

Si je vous disais qu'un passionné des nombres, Monsieur de Polignac, a déclaré avoir fait la vérification pour tous

les nombres impairs inférieurs à trois millions, quelle serait votre réaction?

Yannick

J'étais déjà convaincu que cela est toujours possible, la déclaration de Polignac ne fait que confirmer ma conviction.

Annick

Je ne peux faire autrement que d'être convaincue, mais tu ne sembles pas emballée!

Alexandra

Le problème c'est que pour vérifier les dires de Polignac il faut refaire tous ses calculs. De plus, il reste beaucoup de nombres qui n'ont pas été vérifiés. Un million et demi de nombres impairs sur une infinité, c'est peu.

Yannick

On n'a pas besoin de les vérifier tous, on constate que cela fonctionne toujours.

Alexandra

En fait, on peut montrer que cela n'est pas toujours possible. S'il a vraiment fait tous ces calculs, Polignac s'est trompé pour le nombre 127, dont les décompositions comme somme de nombres comportant une puissance de 2 sont les suivantes :

$$127 = 1 + 126 = 2^0 + (2 \times 63)$$

$$127 = 2 + 125 = 2^1 + (5 \times 25)$$

$$127 = 4 + 123 = 2^2 + (3 \times 41)$$

$$127 = 8 + 119 = 2^3 + (7 \times 17)$$

$$127 = 16 + 111 = 2^4 + (3 \times 37)$$

$$127 = 32 + 95 = 2^5 + (5 \times 19)$$

$$127 = 64 + 63 = 2^6 + (3 \times 21)$$

Ce sont les seules décompositions du nombre 127 comportant une puissance de deux. En prenant 2^7 , on obtient 128, c'est trop grand.

Annick

Je comprends. Si on considère 127 comme la somme de deux nombres dont l'un est une puissance de 2, l'autre nombre n'est jamais premier.

Alexandra

Voilà. Il nous faut donc conclure que la conjecture de Polignac est fausse, car les nombres impairs ne peuvent pas tous s'exprimer comme la somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier.

Yannick

Je suis déçu.

Alexandra

Tu comprends pourquoi les mathématiciens ne considèrent pas comme vraie une « propriété » qui n'a pas été démontrée, même si elle semble « évidente ».

Yannick

Je comprends, mais je suis déçu quand même, ça aurait été si simple.

Alexandra

Pour vous convaincre, j'ai fait une démonstration. En montrant que 127 ne peut s'exprimer comme la somme d'une puissance de deux et d'un nombre premier, j'ai démontré que la conjecture de Polignac est fausse. C'est ce qu'on appelle une *démonstration par contre-exemple*.

C'est beaucoup moins exigeant de lire la démonstration que de refaire tous les calculs de monsieur de Polignac.

