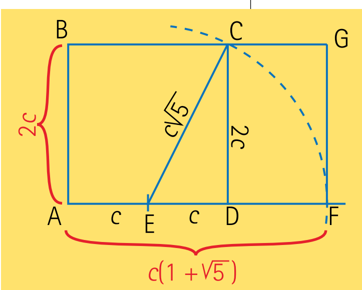
Solutions été-automne 2008

Nautile et nombre d'or

1. Pour éviter les fractions, considérons que la longueur du côté du carré est $2c$. Le triangle rectangle EDC a alors un côté de l'angle droit de longueur $2c$ et l'autre est de longueur c. La longueur de l'hypoténuse est alors :



$$\sqrt{c^2+4c^2}=\sqrt{5c^2}=c\sqrt{5}.$$

Par construction, EC et EF ont la même longueur. Par conséquent, la longueur de AF est :

$$c+c\sqrt{5}=c\left(1+\sqrt{5}\right).$$

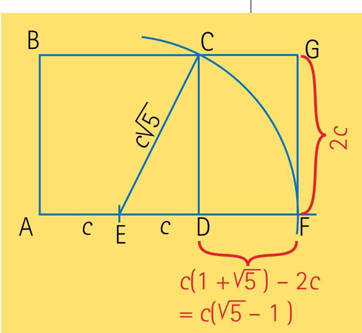
Le rapport des côtés du rectangle donne alors :

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\frac{c(1+\sqrt{5})}{2c}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi.$$

2. Si on enlève le carré ABCD, il reste le rectangle DCGF. La longueur du côté GF est $2c$ alors que celle du côté DF est :

$$c(1+\sqrt{5})-2c=c(\sqrt{5}-1).$$

En faisant le rapport des côtés et en rationnalisant le dénominateur, on obtient alors :



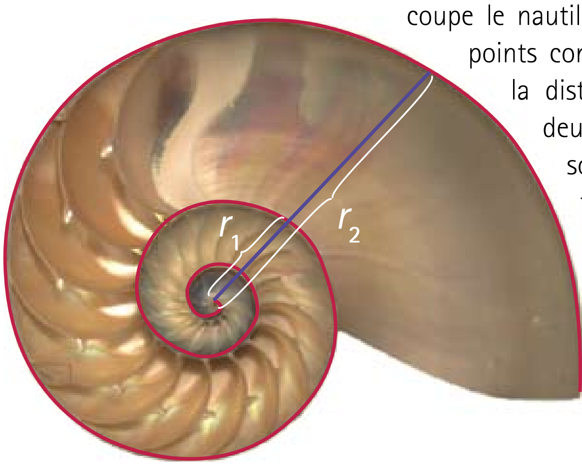
$$\frac{\overline{GF}}{\overline{DF}}=\frac{2c}{c(\sqrt{5}-1)}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\phi.$$

3. Pour estimer le paramètre b, il faut localiser approximativement le centre du nautile et tracer une demi-droite issue du centre. Elle coupe le nautile en au moins deux points consécutifs. On mesure la distance au centre des deux points extérieurs, soit $r_1 < r_2$. Cette distance dépend des unités choisies. Par contre, le rapport r_2/r_1 est indépendant des unités. Sur ce nautile, il est approximativement égal à 3. D'autre part,



$$\frac{r_2}{r_1}=e^{2\pi b}.$$

On cherche donc b tel que $e^{2\pi b}=3$, et on obtient :

$$b=\frac{\ln 3}{2\pi}\approx 0{,}175.$$

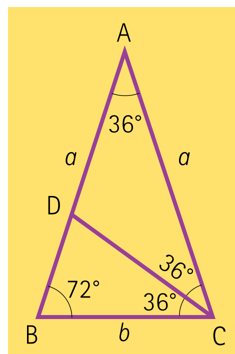
4. L'équation caractéristique $\phi^2-\phi-1=0$ donne $\phi^2=1+\phi$ et $\phi=\sqrt{1+\phi}$. Par substitution, on obtient :

$$\phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\phi}}.$$

Et, en itérant :

$$\phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}.$$

5. Considérons un triangle isocèle ABC ayant un angle de 36° et deux angles de 72°. Traçons la bissectrice de l'angle ACB qui coupe le côté AB au point D. On construit alors un nouveau triangle isocèle, le triangle BCD. En effet, DC étant la bissectrice, l'angle BCD mesure 36° et l'angle DBC mesure 72°. La somme des angles intérieurs du triangle étant de 180°, l'angle BDC mesure également 72°. De la même façon, on constate que le triangle ACD est un triangle ayant deux angles de 36° et un angle de 108°, il est donc isocèle.



En vertu du théorème sur la bissectrice d'un angle d'un triangle, on peut écrire la proportion :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

Par ailleurs, on a $\overline{AB}=\overline{AC}$ comme côtés congruents du triangle isocèle ABC. De plus, $\overline{BC}=\overline{DC}$ comme côtés congruents du triangle isocèle BDC et $\overline{CD}=\overline{AD}$, comme côtés congruents du triangle isocèle ACD. On a donc :

$$\overline{BC}=\overline{DC}=\overline{AD}.$$

En substituant, on obtient :

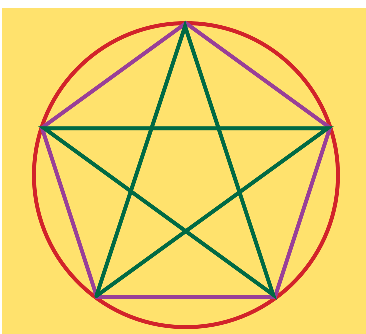
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\phi.$$

En effet, le point D divise le côté AB en extrême et moyenne raison. Le rapport des côtés est donc le nombre d'or.

6. Le triangle ACD est un triangle isocèle ayant deux angles de 36° et un angle de 108°. Et, puisque $\overline{BC}=\overline{DC}$, on a :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}=\phi.$$

7. La figure regorge de triangles isocèles ayant un angle de 36° et deux angles de 72°. Elle regorge également de triangles ayant un angle de 108° et deux angles de 36°.



Spirales végétales

1. On cherche la fraction continue de :

$$x=\sqrt{3}+1.$$

Or, $x=2+\left(\sqrt{3}-1\right)$, où $\sqrt{3}-1 \in [0,1[$.

Donc, $a_0 = 2$. On peut encore écrire x comme :

$$x=2+\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}}=2+\frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}},$$

où $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \in [1,2[$.

Alors, $x=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}$

$$=2+\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=2+\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}.$$

On itère en remplaçant x par l'expression déjà obtenue. On voit donc que la suite des coefficients de la fraction continue est :

$$\{2,1,2,1,2,1, \ldots\}.$$

2. On cherche le nombre x dont le développement en fraction continue a les coefficients :

$$\{1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Alors, on a :

$$x=1+\frac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}.$$

Cherchons x qui est solution de cette équation.

$$x=1+\frac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}=1+\frac{1}{2+\dfrac{x}{3x+1}}$$

$$=1+\frac{1}{\dfrac{7x+2}{3x+1}}=1+\frac{3x+1}{7x+2}=\frac{10x+3}{7x+2}.$$

On doit résoudre l'équation :

$$x=\frac{10x+3}{7x+2},$$

d'où $\quad x(7x + 2) = 10x + 3$

et $\quad 7x^2 - 8x - 3 = 0.$

Par sa forme, x est positif. Il est donc égal à la racine positive de cette équation quadratique, soit :

$$x=\frac{4+\sqrt{37}}{7}.$$

En cas de doute, le calcul de la fraction continue de $\dfrac{4+\sqrt{37}}{7}$, comme au numéro 1, permettrait de vérifier le résultat.

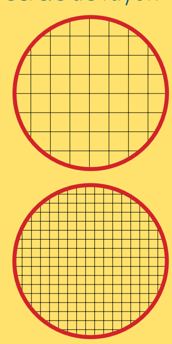
Solutions été-automne 2008

King Kong et les fourmis

1. Une corde agrandie d'un facteur k est k^2 fois plus solide et k^3 fois plus lourde (voir l'encadré *La taille, la force et la solidité*). Si on suppose que la corde est assez solide pour supporter A fois son poids avant d'être agrandie, il suffit de l'agrandir d'un facteur plus grand que A pour qu'elle ne puisse plus supporter son propre poids.
2. Plus un animal est petit, plus la perte de chaleur est rapide relativement à la quantité de chaleur emmagasinée dans son corps. (Voir le paragraphe *La résistance des gros*.) Le cœur bat plus vite, notamment afin de contrer ce refroidissement, en apportant très rapidement au corps ce dont il a besoin pour se réchauffer.

   Notez bien qu'une réponse plus complète peut être apportée et les lecteurs sont encouragés à compléter le tout de manière plus précise. On peut envisager un beau projet de recherche pour un élève du secondaire.
3. On peut être tenté de dire que cela est évident, mais comment bien l'expliquer ? Une explication, qui reprend les idées de l'article, s'amorce en considérant le cercle de rayon 1 comme étant subdivisé en plusieurs petits carrés. Évidemment, on ne peut ainsi obtenir le cercle dans son entièreté, mais si on le remplit de carrés suffisamment petits, il est facile d'accepter que l'aire totale de ces petits carrés est très près de l'aire du cercle.

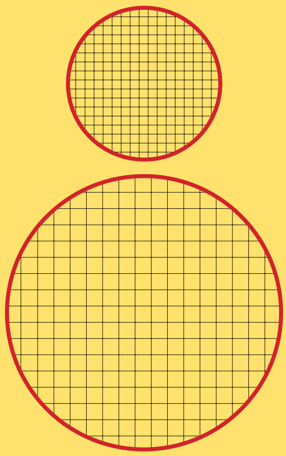
   Cercle de rayon 1

   La somme des aires des carrés est de plus en plus proche de l'aire du cercle lorsqu'on augmente le nombre de carrés.

   On modifie alors ce cercle en l'agrandissant ou en le rapetissant d'un facteur r (par une homothétie de rapport r en fait), et on fait de même avec chacun des petits carrés. L'aire de chacun de ces petits carrés est multipliée par r^2, et la somme de l'aire des carrés est donc aussi multipliée par r^2. Comme ces nouveaux carrés remplissent presque le cercle de rayon r, l'aire de ce cercle est aussi multipliée par r^2.

Homothétie de rapport r



Cercle de rayon r
L'aire de chaque carré
est multipliée par r^2.

On peut rendre cet argument tout à fait correct en faisant un passage à la limite, mais il permet déjà de mieux comprendre pourquoi il y a un r^2 dans la formule bien connue. On peut faire de même pour le volume d'une sphère...

À qui appartient le zèbre?

1. En tentant de résoudre le problème, on déduit que l'ensemble des indices est incohérent. Le logiciel de résolution par ordinateur sait détecter de tels cas particuliers en une fraction de seconde.
2. Non, il n'en existe pas d'autre. On dit que la solution est unique. Une façon de faire pour prouver ce fait consiste à résoudre le problème initial en lui ajoutant la contrainte suivante concernant la première combinaison de la solution: Indice 16: La combinaison Blanche-Violoniste-Espagnol-Chien-Jus-4 n'est pas acceptable. Le problème devient alors irréalisable. Cette combinaison doit donc absolument faire partie de la solution. On modifie ensuite cet Indice 16 en supposant plutôt que la deuxième combinaison de la solution n'est pas acceptable. On trouvera encore que le problème est irréalisable et que cette combinaison doit, elle aussi, faire nécessairement partie de la solution. On fait de même pour les combinaisons 3 et 4 de la solution finale et le raisonnement sera identique. La dernière n'a donc pas le choix et doit faire partie de la solution. Heureusement que l'ordinateur nous aide à faire cela très rapidement!
3. La solution proposée dans l'article respecte les 15 indices. Si l'indice 8 est éliminé, la solution respectera les 14 indices restants et demeurera donc valide. Elle n'est toutefois plus unique. La démarche proposée à la question précédente vous permet de découvrir qu'il existe une deuxième solution à ce nouveau problème (en fait, il en existe plus de deux): les maisons 2, 4 et 5 demeurent identiques et les deux combinaisons suivantes sont maintenant vraies: Rouge-Diplomate-Anglais-Renard-Lait-3 et Jaune-Sculpteur-Norvégien-Escargots-Eau-1. Le fait d'avoir plus d'une solution est une conclusion importante en pratique. En effet, si plus d'un calendrier de vols est acceptable, un transporteur aérien choisira probablement celui qui maximise son profit. Lorsque la solution est unique, l'entreprise n'a pas de véritable décision à prendre et choisit nécessairement la solution proposée. Ceci amène l'analyse des contraintes d'un problème. Une entreprise peut être intéressée à savoir quelles sont la ou les contraintes qui, si éliminées, permettraient d'élargir l'éventail des possibilités.
4. La solution demeurerait valide. Elle respecte déjà les 15 premiers indices et la solution propose effectivement que le violoniste habite la maison blanche, satisfaisant automatiquement le nouvel indice. Il est donc possible, dans un problème donné, que certains indices soient superflus. Dans ce cas, on dit qu'un indice est redondant, ce qui signifie qu'il n'apporte rien de nouveau au problème initial. L'élimination des indices redondants est souhaitable (mais il n'est pas toujours facile de déterminer quels indices le sont).