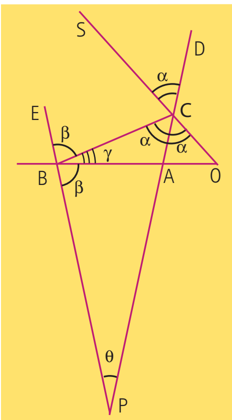
Solutions été-automne



GPS

Fonctionnement du sextant

Il faut montrer que :

$$\angle AOC = 2\angle BPC.$$

On constate facilement que :

$$\angle ACO = \angle SCD = \alpha,$$

puisque ce sont des angles opposés par le sommet. De plus, lorsqu'un rayon lumineux est réfléchi par un miroir, l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. On a donc $\angle SCD = \angle ACB = \alpha$, et $\angle EBC = \angle PBA = \beta$. La somme des angles adjacents dont les côtés extérieurs forment une droite est égale à π. On a donc :

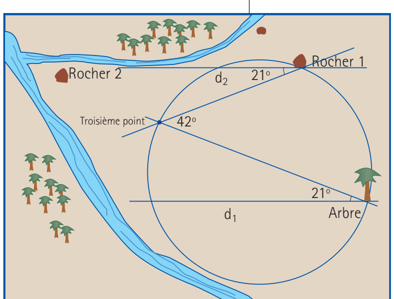
$$\gamma = \pi - 2\beta.$$

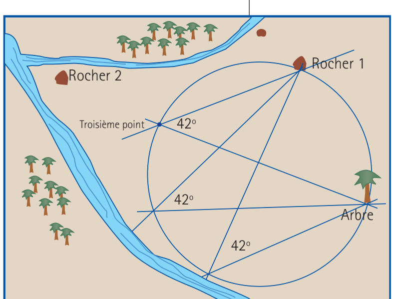
Puisque la somme des angles d'un triangle est égale à π, on peut écrire, à partir du triangle PBC :

$$\begin{aligned}\angle BPC &= \pi - \alpha - \beta - \gamma\\ &= \pi - \alpha - \beta - (\pi - 2\beta)\\ &= \beta - \alpha.\end{aligned}$$

De plus, à partir du triangle BOC, on a :

$$\begin{aligned}\angle AOC &= \pi - 2\alpha - \gamma\\ &= \pi - 2\alpha - (\pi - 2\beta)\\ &= 2(\beta - \alpha) = 2\angle BPC.\end{aligned}$$



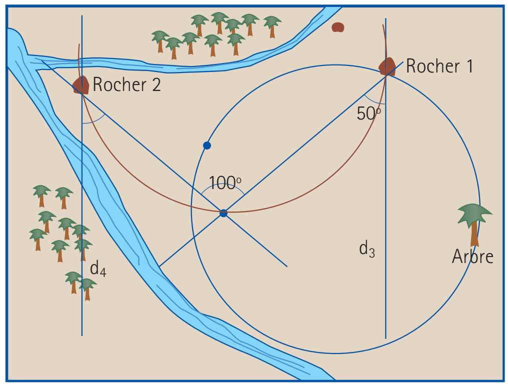


Positionnement par angles de visée

Il faut d'abord tracer deux droites parallèles d_1 et d_2, l'une passant par l'arbre et l'autre par le rocher. On trace ensuite une droite passant par l'arbre et formant un angle de 21° avec d_1. Puis, une droite passant par le rocher et formant un angle de 21° avec d_2. On trace ensuite le cercle passant par le point de rencontre de ces deux droites, par l'arbre et par le premier rocher.

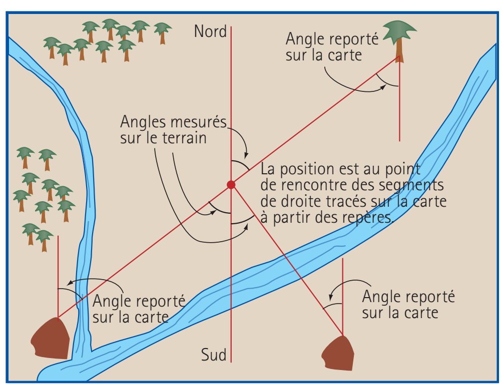
Sur la première figure, les deux parallèles ont été tracées parallèlement aux côtés de la carte, mais cela n'a pas d'importance, on aurait pu choisir une direction quelconque.

En effet, chaque point de la circonférence de ce cercle forme un angle de 42° avec l'arbre et le premier rocher.



Traçons maintenant des droites d_3 et d_4 parallèles entre elles et passant l'une par le premier rocher et l'autre par le second. On peut en procédant comme précédemment, tracer un deuxième cercle, dont tous les points constituent le sommet d'un angle inscrit de 100° passant par les deux rochers. Le point de rencontre des deux cercles est l'emplacement du trésor.

On a découvert un trésor géométrique. Il suffit de trois points connus pour définir une position par des angles de visée. C'est exactement ce que fait le randonneur disposant d'une boussole lorsqu'il veut déterminer sa position sur une carte. Il détermine, de sa position, la direction de trois repères apparaissant sur la carte et il reporte ces observations sur la carte pour obtenir trois segments de droites dont le point de rencontre est sa position.



Racines

Racine carrée de 2

En prenant 4/3 comme première approximation, la base du rectangle est 3/2. La moyenne de ces deux nombres est 17/12. Les dimensions du rectangle sont alors 17/12 et 24/17. La moyenne de ces nombres est 577/408. Les dimensions du rectangle sont alors 577/408 et 816/577. La moyenne de ces nombres est 665 857/470 832. En utilisant la calculatrice pour exprimer en décimal, on obtient 1,414213562 qui est la racine carrée de 2 à huit décimales. En réalité, la fraction 665857/470832 = 1,4142135623746... et est exacte à la treizième décimale.

Racine cubique de 32

On peut considérer 3 comme première approximation puisque $3^3 = 27$. On a alors :

$$3^2x = 32 \text{ et } x = 32/9.$$

La moyenne pondérée donne :

$$\frac{2}{3}\times 3+\frac{1}{3}\times\frac{32}{9}=\frac{86}{27}.$$

En procédant à nouveau, on obtient :

$$x\left(\frac{86}{27}\right)^2 = 32, \text{d'où } x=\frac{32\times 27^2}{86^2}.$$

La moyenne pondérée donne :

$$\frac{2}{3}\times\frac{86}{27}+\frac{1}{3}\times\frac{32\times 27^2}{86^2}=\frac{475\,492}{149\,769}.$$

Cette valeur comporte 4 décimales exactes.

Extraction dans un carré

Racine carrée de 21

Considérons 5 comme première approximation. On a alors :

$$21 = 25 - 10d + d^2.$$

En négligeant d^2, on obtient :

$$10d = 4, \text{ d'où } d = 2/5.$$

Cela donne :

$$\sqrt{21}\approx 5-\frac{2}{5}=\frac{23}{5}.$$

On a alors :

$$21=\left(\frac{23}{5}\right)^2-\frac{46}{5}d+d^2.$$

En négligeant d^2, on obtient $d = 2/115$ et :

$$\sqrt{21}\approx\frac{23}{5}-\frac{2}{115}=\frac{527}{115}.$$

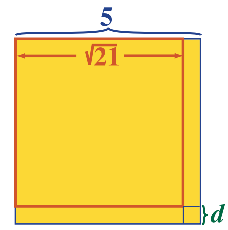
On a alors :

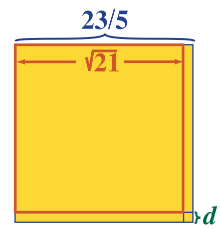
$$21=\left(\frac{527}{115}\right)^2-2\times\frac{527}{115}d+d^2.$$

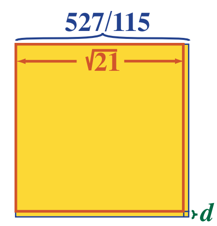
En négligeant d^2, on obtient $d = 2/60605$ et :

$$\sqrt{21}\approx\frac{527}{115}-\frac{2}{60605}=\frac{277727}{60605}.$$

Cette fraction donne 4,58257569507466 et la calculatrice donne 4,582575695 comme approximation de la racine carrée de 21.







Racine carrée de 75, méthode mésopotamienne

Considérons $a = 9$ comme première approximation. La « formule mésopotamienne » donne alors :

$$\frac{(9)^2+75}{2\times 9}=\frac{26}{3}.$$

En appliquant à nouveau, on obtient :

$$\frac{(26/3)^2+75}{2\times(26/3)}=\frac{1351}{156}.$$

Cette fraction donne 8,66025641 et la calculatrice, 8,660254038 comme approximation de la racine carrée de 75.

Codes

Codes CUP

$$7+1+1+9+3+0 = 21$$
$$\times 3$$
$$63$$

7 71818 95310 *x*

$$7+8+8+5+1 = 29$$
$$63 + 29 = 92$$

On obtient $x = 8$.

Carte de crédit

La somme des chiffres de ces nombres donne 33

10, 0, 4, 6, 0, 4, 4, 14

$$\times 2$$

5402 2436 0021 2477

$$4+2+4+6+0+1+4+7 = 28$$
$$+$$
$$61$$

La carte n'est pas valide car le total n'est pas divisible par 10.

Clone ou original ?

Il n'y a que dix chiffres-clés possibles, un pour l'original et au maximum 9 pour les clones.

$$0+4+0+0+0+1 = 5$$
$$\times 3$$
$$15$$

0 34000 04001 6

$$3+0+0+4+0 = 7$$
$$15 + 7 = 22$$

C'est un clone espion, le chiffre-clé qui rend le code valide est 8.

Méthode IBM

Supposons qu'une personne a inversé deux chiffres en donnant son numéro de carte de crédit.

Vérifions d'abord qu'une inversion des chiffres 0 et 9 ne peut être détectée. Supposons que 0 est en position paire et 9 en position impaire. La méthode IBM donne alors $0 + 9 = 9$. En inversant les deux chiffres, le produit 2 fois 9 donne 18 et la somme des chiffres donne :

$$1 + 8 + 0 = 9.$$

L'erreur ne sera pas détectée puisque la somme des chiffres est inchangée.

Déterminons maintenant à quelles conditions une inversion des nombres a, en position impaire, et b, en position paire, sera détectée.

Si $0 < a < 5$ et $0 < b < 5$, on a alors sans inversion, $a + 2b$ et avec inversion, $b + 2a$. Pour que l'erreur ne soit pas détectée,

il faut que :

$$a + 2b = b + 2a, \text{ d'où } a = b.$$

Si $0 < a < 5$ et $5 \leq b < 9$, la somme sans inversion est, $a + 1 + (2b - 10)$ et avec inversion, $2a + b$. Pour que l'erreur ne soit pas détectée, il faut que :

$$a + 1 + (2b - 10) = 2a + b, \text{ d'où } b = a + 9.$$

Il n'y a donc aucune solution satisfaisant les contraintes $0 < a < 5$ et $5 \leq b < 9$. On procède de la même façon, si $5 \leq a < 9$ et $0 \leq b < 5$.

Si $5 \leq a < 9$ et $5 \leq b < 9$, la somme sans inversion est, $a + 1 + (2b - 10)$ et avec inversion, $b + 1 + (2a - 10)$. Pour que l'erreur ne soit pas détectée, il faut que :

$$a + 1 + (2b - 10) = b + 1 + (2a - 10),$$
$$\text{d'où } b = a.$$