# Section problèmes

***Albédo de la Terre***

*L'albédo de la Terre est environ a = 0,3 car les nuages, la neige, la glace et les plans d'eaux réfléchissent la lumière du Soleil. C'est pourquoi, on voit si bien la Terre de l'espace.*

*Crédit : Kenneth M. Golden: http://www.math.utah.edu/~golden/icescapes.html*

## Effet de serre (secondaire)

1. L'albédo d'une planète, notée $a$, est égale à la fraction de la lumière émise par son étoile qui est réfléchie à sa surface. Par exemple, si une planète est noire, alors son albédo est $a = 0$ et si la planète était recouverte de miroirs, alors $a = 1$.

   Montrer qu'une planète avec une seule couche de GES et un albédo $a$ aurait une température de

$$T_p = \sqrt[4]{2(1-a)}\,\frac{T_s}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{R_s}{D}}.$$

2. En considérant que la distance de la Terre au Soleil est $D = 1{,}5 \times 10^8$ km, que la température du Soleil est 5 780 K, son rayon $R_s = 6{,}7 \times 10^5$ km et que l'atmosphère de la Terre contient une couche de GES, utiliser la formule précédente pour prédire la température moyenne de la Terre. Comparer avec la valeur actuelle.

## L'effet papillon (collégial)

3. Soit la fonction $f$: $[0, 1] \to [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1/2] \\ 2x-1 & x \in \,]1/2,1] \end{cases}$$

   On s'intéresse aux suites $\{x_n\}$ définies par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de $f$.

b) En utilisant que tout $x \in [0, 1]$ s'écrit en base 2 comme $x = (0{,}a_1a_2a_3\ldots)_2$, où $a_i \in \{0, 1\}$, montrer que $f(x) = (0{,}a_2a_3a_4\ldots)_2$. (sauf si $x = 1/2$ ou $x = 1$).

(Rappel : l'écriture $x = (0{,}a_1a_2a_3\ldots)_2$ signifie que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ où, pour tout $i$, $a_i \in \{0, 1\}$.

c) (Difficile) Montrer que a) est encore valable si on remarque que

$$1 = (0{,}111\ldots)_2 \text{ et } 1/2 = (0{,}0111\ldots)_2.$$

(Pour cela il faut calculer la somme de la série donnée par le développement en base 2.) Donner de la même manière un développement infini pour tout nombre $x_0 = 1/2^n$.

d) Si on prend $x_0$ tel que $x_n = x_0$, et $x_k \neq x_0$ pour $0 < k < n$, alors on dit que $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ est une orbite périodique de période $n$. Montrer que $f$ a des orbites de toutes les périodes. Suggestion : prendre $x_0$ dont le développement en base 2 est de période $n$.

e) Montrer que si $x$ et $y$ ont les mêmes $n$ premiers chiffres 0 ou 1 après la virgule dans le développement en base 2 (lorsqu'on utilise un développement infini), alors $|x-y| \leq 1/2^n$.

f) (Difficile) Montrer que $f$ a une orbite partout dense. Suggestion : énumérer toutes les suites finies de 0 et de 1, soit toutes les suites de longueur 1, puis toutes celles de longueur 2, puis toutes celles de longueur 3, etc. et les mettre bout à bout pour faire le développement en base 2 de $x_0$. Montrer que pour tout $y_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $|x_m - y_0| \leq 1/2^n$.

g) Se convaincre que $f$ est sensible aux conditions initiales. Suggestion : en utilisant e), voir qu'il est possible de choisir $x_0$ et $y_0$ très proches, par exemple $|x_0 - y_0| \leq 1/2^n$, tels que pour $m > n$, alors $x_m$ et $y_n$ n'ont plus rien en commun.