Le paradoxe des Dupont

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Chacun connaît le paradoxe du menteur. Un personnage dit « je mens ». S'il dit vrai, alors il ment, donc il ne dit pas vrai : c'est absurde. S'il ment, alors ce qu'il dit est vrai, et donc il ne ment pas : c'est absurde. On interprète souvent ce paradoxe en indiquant qu'il faut s'interdire les phrases auto-référentes (c'est-à-dire parlant d'elles-mêmes).

Les choses ne sont peut-être pas si simples comme le montre la situation suivante. Supposons donnée une infinité de personnages (appelés Dupont-0, Dupont-1, ..., Dupont-*n*, ...) placés en ligne les uns derrière les autres : - Dupont-0 est placé en tête de la rangée infinie et n'a personne devant lui. - Dupont-1 est placé juste derrière Dupont-0, - Dupont-2 est placé juste derrière Dupont-1, etc. Chaque Dupont prononce la phrase : « au moins une personne derrière moi ment ». Qui dit vrai ? Qui ment ? D'après le sens des phrases prononcées :

- derrière tout Dupont qui dit vrai, il y a au moins un Dupont qui ment ;
- si un Dupont ment alors tous les Dupont derrière lui disent la vérité.

Si on désigne par M les Dupont qui mentent et par H ceux qui sont honnêtes et donc ne mentent pas, les deux règles précédentes se traduisent en :

a) derrière tout H, il y a au moins un M;

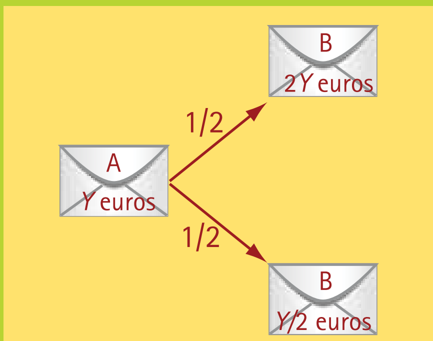
b) derrière un M, il n'y a que des H.

Or, il est impossible de concevoir une suite infinie de M et de H qui vérifie les règles (a) et (b), car tout M doit être suivi uniquement de H, ce qui ne se peut pas puisque tout H doit être suivi d'au moins un M. Comme dans le cas du paradoxe du menteur, mais cette fois sans aucune auto-référence (directe ou indirecte) la situation est contradictoire. Pourquoi ?

Solution du paradoxe précédent

Les deux enveloppes d'Amandine

Amandine me montre deux enveloppes fermées identiques *A* et *B*. Elle me dit que l'une contient une certaine somme en euros et que l'autre contient le double de cette somme, mais ne précise pas laquelle contient le plus. Elle m'offre de choisir une des enveloppes, son contenu sera pour moi. N'ayant pas de raison particulière de préférer l'une à l'autre, je choisis l'enveloppe *A*.



$$E = \frac{1}{2} \times 2Y + \frac{1}{2} \times \frac{Y}{2} = 1{,}25Y$$

Cependant, au moment de l'ouvrir, je raisonne ainsi. L'enveloppe *A* contient une certaine somme, disons *Y* euros ; il y a une chance sur deux pour que *B* contienne 2*Y* euros, et une chance sur deux pour que *B* contienne *Y*/2 euros ; l'espérance de contenu de l'enveloppe *B* est donc

$$2y \times \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \times \frac{1}{2} = Y + \frac{Y}{4} = 1{,}25Y \text{ euros.}$$

Rappelons que l'espérance est la moyenne pondérée par les probabilités de ce que je peux gagner selon les diverses éventualités ; ici c'est ce qu'on trouverait en moyenne dans *B*, si on recommençait l'expérience un très grand nombre de fois. L'espérance de contenu de *B* étant 1,25*Y* euros, et celle de *A* étant bien sûr de *Y* euros, mon intérêt est de changer mon choix et de prendre *B* à la place de *A*. En moyenne, cela me rapportera 25 % de plus.

Est-ce bien certain ? Non, c'est ridicule, car si au départ j'avais choisi *B*, le même raisonnement me conduirait maintenant à reporter mon choix sur *A*. Le raisonnement est donc faux. Mais en quoi précisément ?

Solution

L'erreur provient du fait qu'on calcule en utilisant la variable *Y* correspondant au contenu de mon enveloppe et qu'on considère que ce *Y* est fixe dans les deux cas, ce qui n'est pas vrai.

Le bon raisonnement consiste à dire : il y a deux possibilités (cas 1) *A* contient *X* et *B* contient 2*X* et (cas 2) *A* contient 2*X* et *B* contient *X*. L'espérance de contenu de l'enveloppe A est

$$X \times \frac{1}{2} + 2X \times \frac{1}{2} = \frac{X}{2} + X = 1{,}5X \text{ euros.}$$

L'espérance de contenu de l'enveloppe *B* est

$$2X \times \frac{1}{2} + X \times \frac{1}{2} = X + \frac{X}{2} = 1{,}5X \text{ euros.}$$

L'espérance associée à *B* est donc la même que celle associée à *A* et je n'ai pas d'intérêt particulier à changer mon choix initial.