Vous êtes la personne la plus riche du monde

Réjouissez-vous, car aujourd'hui nous allons vous démontrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que vous êtes la personne le plus riche du monde.

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences et Technologies de Lille

Les trois phrases suivantes (dont pour l'instant nous ne savons pas lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses), constituent le fondement de notre raisonnement.

- *La troisième phrase est vraie et vous êtes la personne la plus riche du monde.*
- *La troisième phrase n'est pas vraie.*
- *Une au moins des deux premières phrases est vraie.*

Raisonnement par l'absurde[1]

Supposons que la troisième phrase est fausse. Cela signifie que la première et la seconde phrase sont toutes les deux fausses.

Mais, si la seconde phrase est fausse, alors la troisième est vraie. Donc, la troisième phrase est à la fois fausse par hypothèse et vraie par déduction. Nous avons donc une contradiction.

1. *Voir l'article* Raisonner par l'absurde *dans ce numéro.*

L'hypothèse selon laquelle la troisième phrase est fausse conduit à une contradiction. Il faut donc la rejeter.

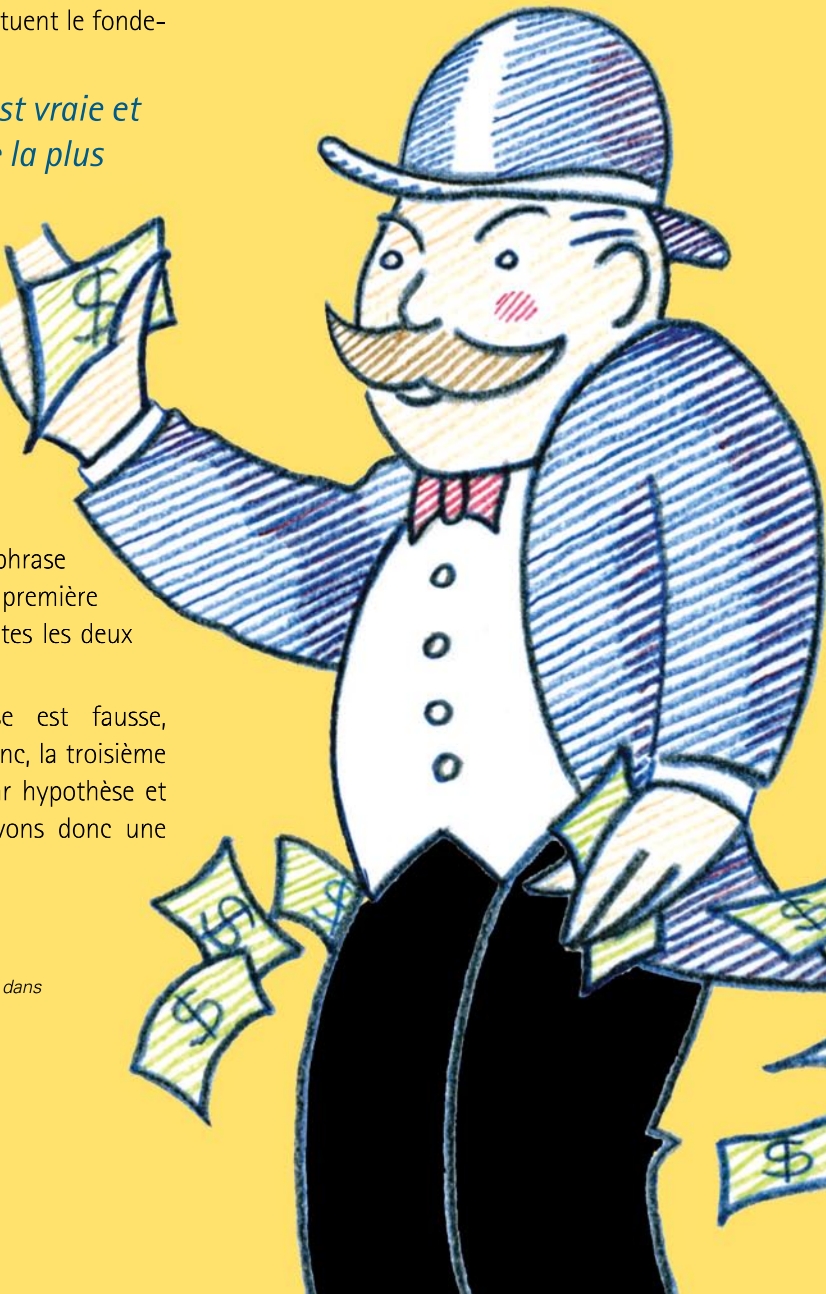
Que conclure?

Il faut donc admettre que la troisième phrase est vraie. Par conséquent, la seconde phrase est fausse.

Or, la troisième phrase, qui est vraie, dit qu'au moins une des deux premières phrases est vraie. Puisque la seconde phrase est fausse, il faut alors conclure que la première phrase est vraie et, donc, que vous êtes la personne la plus riche du monde.

Vous connaissez pourtant des gens plus riches que vous.

Qu'est-ce qui cloche ?



Solution du paradoxe précédent

Tout nombre plus grand ou égal à 2 est pair

Si E *est un ensemble fini de nombres commençant à 2, alors* E *ne contient que des nombres pairs.*

Le raisonnement portait sur le nombre k d'éléments de E et la démonstration était la suivante.

Si $k = 1$, la propriété (Pro(1)) est vraie car alors E ne contient qu'un élément, 2, qui est pair et donc E ne contient que des nombres pairs.

Supposons que la propriété est vraie pour un ensemble de k éléments commençant à 2 (Pro(k) est vraie).

Soit un ensemble E ayant $k + 1$ éléments et contenant 2. Soient deux parties A et B différentes l'une de l'autre, contenues dans E, chacune ayant 2 pour élément et ayant chacune k éléments.

Puisque A et B contiennent k éléments et commencent à 2, d'après l'hypothèse de récurrence ces sous-ensembles ne contiennent que des nombres pairs. Leur réunion, E, ne contient donc que des nombres pairs et Pro($k + 1$) est vraie.

Le raisonnement par récurrence est terminé et, puisque les deux conditions sont satisfaites, on peut conclure que :

Pro(n) est vraie pour tout $n \geq 1$.

Par conséquent, puisque tout ensemble fini commençant à 2 ne contient que des nombres pairs, tout ensemble de la forme $\{2, 3, ..., n\}$ ne contient que des nombres pairs.
Donc tout nombre entier plus grand ou égal à 2 est pair.

Ce raisonnement par récurrence est faux car pour montrer que pour tout $k > 1$, Pro(k) entraîne Pro(k+1), on tenait le raisonnement suivant :

Soit un ensemble E ayant $k + 1$ éléments et contenant 2. Soient deux parties A et B différentes l'une de l'autre, contenues dans E, chacune ayant 2 pour élément et ayant chacune k éléments.

Or, lorsque $k = 1$, toute partie contenue dans E, ayant 2 pour élément et ayant k éléments est égale à $\{2\}$. Il est donc impossible de trouver deux parties A et B distinctes comme je le supposais implicitement.

La récurrence proposée était impeccable... sauf pour $k = 1$.

Donc, tout était faux et le paradoxe n'était qu'une illusion.