Raisonner par l'absurde

Yannick et Annick sont intrigués. Que signifie raisonner par l'absurde ?

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Annick
Bonjour Alexandra. Peux-tu nous expliquer ce qu'est une *preuve par l'absurde*?

Alexandra
Bonjour vous deux. Le raisonnement par l'absurde n'est pas propre aux mathématiques; on peut avoir à l'utiliser dans tous les domaines du savoir.

Ce type de raisonnement permet de s'assurer de la cohérence des théories en éliminant les contradictions.

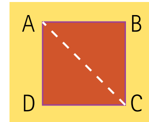
Annick
Je ne suis pas certaine de comprendre. Peux-tu nous donner un exemple?

Alexandra
Oui! Le raisonnement par l'absurde pourrait avoir été utilisé pour la première fois par le pythagoricien Hippase de Metaponte[1] pour montrer que le rapport de la diagonale du carré sur son côté ne peut s'exprimer comme un quotient de nombres entiers[2].

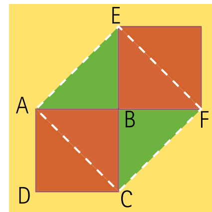
Yannick
Il a fait cela comment?

Alexandra
Il aurait supposé qu'en mesurant la diagonale et le côté du carré à l'aide de la plus grande commune mesure, le rapport de ces longueurs était le quotient de deux nombres entiers. Il a alors remarqué que ces entiers étaient forcément premiers entre eux. Vous savez pourquoi?

1. *Vers le milieu du V^e siècle avant notre ère.*
2. *En langage moderne, $\sqrt{2}$ est un irrationnel.*



Annick
Bien sûr! Ils sont premiers entre eux puisqu'il utilisait la plus grande commune mesure. Le numérateur et le dénominateur de la fraction qu'il considère n'ont donc pas de facteur commun.



Alexandra
Il a ensuite construit un carré sur la diagonale du premier. Est-ce qu'on peut dire que le nombre donnant l'aire du carré AEFC est un entier divisible par 2?

Yannick
Évidemment, c'est le double de l'aire du carré ABCD, donc ce nombre est divisible par 2.

Alexandra
Tout à fait! Maintenant, pouvez-vous me dire si la longueur de la diagonale AC est donnée par un nombre pair ou un nombre impair?

Yannick
La longueur de la diagonale est un nombre pair, car son carré est pair.

Alexandra
Peut-on dire que l'aire du carré AEFC est divisible par 4?

Annick
Oui, car tout entier carré et pair est divisible par 4.

Yannick
Mais alors l'aire du carré ABCD, qui est la moitié de l'aire du carré AEFC, est également donnée par un nombre pair, donc elle est aussi divisible par 4.

Annick
Et la longueur du côté du carré ABCD est donnée par un nombre pair puisque seul le carré d'un entier pair donne un entier pair.

Alexandra
Voyez-vous la contradiction?

Annick et Yannick en chœur
Oui! On est partis avec un rapport dont le numérateur et le dénominateur n'ont aucun facteur commun et on obtient qu'ils sont tous les deux pairs. Ils ont donc un facteur commun.

Alexandra
Qu'en concluez-vous?

Annick et Yannick en chœur
L'hypothèse est fausse, le rapport de la diagonale et du côté d'un carré ne peut s'exprimer comme un quotient de deux entiers.

Alexandra
Voilà! C'est cela un raisonnement par l'absurde. Pour montrer que le rapport de la diagonale au côté du carré ne peut s'exprimer comme quotient de deux entiers, on considère comme hypothèse que cela est possible et on montre que l'ajout de cette hypothèse mène à une contradiction. L'hypothèse est donc fausse.

Annick et Yannick
As-tu un autre exemple?

Alexandra
Oui. En géométrie euclidienne, c'est avec un raisonnement par l'absurde que l'on démontre que d'un point *P* hors d'une droite AB, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette droite.

Annick
Voudrais-tu nous l'expliquer pour être certains qu'on comprend bien le principe de la démonstration par l'absurde?

Alexandra
D'accord, mais vous allez m'aider. Pour démontrer que d'un point hors d'une droite on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette droite, quelle est l'hypothèse que je dois faire?

Yannick
Il faut supposer qu'il y a, au moins, deux perpendiculaires possibles.

Alexandra
Parfait. Faisons une petite esquisse en représentant par C et D le pied de nos deux perpendiculaires.

Maintenant, supposons qu'on utilise le segment de droite AB comme axe de réflexion pour construire l'image symétrique. On détermine ainsi un point P' et les droites joignant P' aux points C et D sont également des perpendiculaires au segment AB.

Selon vous, est-ce que je peux dire que PCP' est une droite?

Annick
Oui, car selon notre hypothèse, PC et P'C sont perpendiculaires à la droite AB. Donc l'angle PCB est un angle droit et l'angle P'CB également. Comme la somme de ces angles est de 180°, les côtés extérieurs des angles adjacents PCB et P'CB forment une droite.

Yannick
Mais alors, on peut dire la même chose pour PDP'.

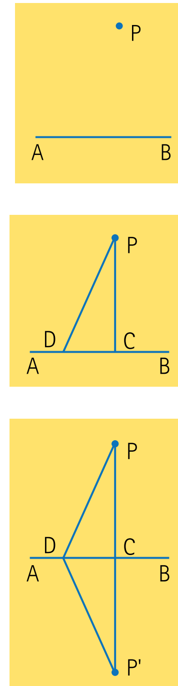
Alexandra
Parfaitement. Est-ce que vous voyez poindre la contradiction?

Annick
Je pense que oui. En acceptant l'hypothèse, cela signifie que l'on peut tracer deux droites passant par P et P' et cela vient en contradiction avec le premier postulat de la géométrie euclidienne qui spécifie que « par deux points passe une et une seule droite ».

Alexandra
Tout à fait. Un raisonnement par l'absurde se fonde sur le fait qu'une proposition doit être vraie ou fausse, elle ne peut être les deux à la fois. Si on suppose qu'elle est vraie et que cette hypothèse entraîne une contradiction, il faut conclure qu'elle est fausse. Cependant, notre démonstration n'est valide que si on accepte les axiomes de la géométrie euclidienne.

Yannick
Parce qu'on peut ne pas les accepter?

Alexandra
Tout à fait, et on peut alors développer d'autres géométries. Ainsi, si on ne retient pas le premier postulat d'Euclide, on peut considérer comme droites les cercles sur une sphère ayant même centre que la sphère. Dans un tel système, on peut, par exemple, abaisser du pôle nord plusieurs perpendiculaires à l'équateur.



Géométrie euclidienne avec raisonnement par l'adsurde