Est-il possible, sans manquer d'énergie, d'envoyer des engins spatiaux jusqu'aux confins du système solaire et de leur faire faire en chemin des révolutions autour de différentes planètes et de leurs lunes ? Oui, à condition de bien choisir la trajectoire. Et, pour cela, il faut commencer par comprendre les mouvements des corps célestes.

Voyager aux confins du système solaire en économisant l'énergie ?

Christiane Rousseau
Université de Montréal

Les sondes spatiales Voyager 1 et 2 ont été lancées en 1977. Voyager 1 avait pour mission d'explorer Jupiter et Saturne. Continuant sur sa lancée, elle a maintenant quitté le système solaire. Pour sa part, Voyager 2 a pu s'approcher d'Uranus et de Neptune et se trouve aux confins du système solaire. Ces missions ont frôlé rapidement les planètes dont elles n'ont pu prendre que quelques photos. La sonde spatiale Galileo lancée en 1989 fut déjà plus précise : elle se plaça en orbite autour de Jupiter en décembre 1995 et accomplit 35 révolutions de deux mois autour de la planète. On peut maintenant concevoir des missions spatiales qui visiteront à tour de rôle les différentes lunes de Jupiter en faisant quelques révolutions autour de chacune avant de revenir sur Terre. Les progrès dans ce domaine viennent de la théorie des systèmes dynamiques, une branche des mathématiques créée par Poincaré à la fin du 19e siècle.

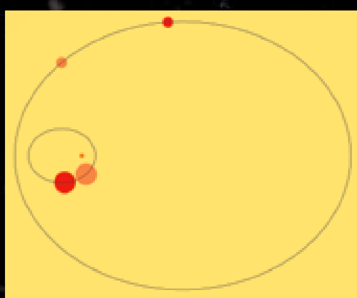
Mais comment s'y prend-on pour ne pas manquer de combustible lorsqu'on envoie des engins spatiaux si loin dans le système solaire ?

En observant et comprenant les trajectoires des objets naturels du système solaire...

Alors que les planètes et astéroïdes circulent sur une orbite, d'autres corps célestes parcourent des distances énormes : ils utilisent des sortes de couloirs spatiaux dans lesquels on peut se déplacer très loin sans aucun apport d'énergie ! La connaissance de ces couloirs se raffine. Toutes ces connaissances reposent sur l'étude des trajectoires des corps célestes soumis à la loi de la gravitation universelle de Newton.

Ainsi, vous connaissez sans doute la loi de Kepler qui affirme qu'un corps de dimension modeste attiré par un autre de très grande taille se déplace sur une ellipse dont le foyer est au centre du corps de grande masse. En fait, cette loi est à la fois inexacte et incomplète.

- Le foyer de l'ellipse est au centre de masse du *système des deux corps* ;



Sur la figure, on voit deux positions des deux corps décrivant des ellipses autour de leur centre de masse (le point orange).

- De plus, la trajectoire n'est une ellipse que si la vitesse initiale n'est pas trop grande. Si la vitesse est suffisante, la trajectoire peut être une parabole ou une hyperbole. Un objet céleste sur une telle trajectoire serait visible une seule fois dans le système solaire.

Au moment du projet spatial Voyager, on retient l'idée d'utiliser des trajectoires naturelles d'un système à deux corps : l'engin spatial et un corps céleste, ce dernier étant typiquement une planète ou le soleil. La trajectoire réelle est approchée par des portions de coniques, chacune correspondant à une trajectoire du système à deux corps constitué de l'engin et d'un corps céleste. Lorsqu'on s'éloigne d'un premier corps céleste et donc, que son attraction gravitationnelle diminue, on utilise un peu de carburant pour changer de direction et se placer sur une autre branche de conique calculée dans un autre système à deux corps. Les sondes Voyager 1 et 2 ont profité d'un positionnement exceptionnel des quatre planètes gazeuses, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, ce qui a permis de les visiter à tour de rôle sans consommer de carburant. Mais cet alignement ne se reproduit que tous les 175 ans, et il faut donc trouver une autre idée pour les nouvelles missions...

La loi de Kepler corrigée plus haut décrit les trajectoires du « problème des deux corps ». On appelle « problème des n corps » le problème de décrire les trajectoires de n points matériels soumis à la loi de la gravitation universelle de Newton. Henri Poincaré a montré à la fin du 19e siècle que ce problème a des trajectoires très complexes, et souvent chaotiques, déjà pour $n = 3$. Pourtant, on connaît des équilibres ou encore des trajectoires particulières du problème des trois corps. En fait, ce qui est utilisé pour raffiner les trajectoires des missions spatiales, ce sont les connaissances du *problème restreint des trois corps*. Dans ce problème on fait l'hypothèse qu'un des corps a une masse nulle. Prenons le cas de la Terre, de la Lune et d'une sonde spatiale. La Terre et la Lune exercent toutes deux une attraction sur la sonde, mais on peut négliger l'attraction gravitationnelle de la sonde sur la Terre et sur la Lune, ce que l'on exprime en prenant une limite des équations de Newton où la masse de la sonde est nulle (voir encadré). En utilisant la connaissance de trajectoires du problème restreint des trois corps, on a pu raffiner énormément la détermination de trajectoires économisant l'énergie pour parcourir le système solaire.

Avant de rentrer dans des explications plus poussées, prenons déjà un cas simple : il existe un point situé entre la Terre et la Lune en lequel l'attraction de la Terre est égale à celle de la Lune ! En ce point, appelé *point de Lagrange*, une sonde spatiale serait en équilibre. On conçoit donc que s'arracher de ce point requière peu d'énergie, et que certains couloirs sont plus éco-énergétiques que d'autres. Également décélérer pour venir s'immobiliser en ce point requiert peu d'énergie puisque l'attraction de la Terre et celle de la Lune s'y annulent. C'est donc l'endroit rêvé pour installer une station de lancement, ou encore une station de relais !

En fait, il existe cinq points de Lagrange pour le système Terre-Lune. Nous les décrirons dans l'encadré. Une fois qu'on s'est servi de ces points et des corridors qui leur sont associés

Le problème restreint des trois corps

Prenons le cas de trois points matériels situés en $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$ de masses respectives m_1, m_2 et m_3. La loi de la gravitation universelle de Newton dit que la force exercée sur le troisième corps par le premier est dirigée du troisième corps vers le premier. C'est donc un multiple du vecteur $\vec{x}_1 - \vec{x}_3$. La longueur de ce vecteur est proportionnelle au produit des masses, et inversement proportionnelle au carré de la longueur du vecteur $\vec{x}_1 - \vec{x}_3$. Cette force est donc

$K \dfrac{m_1 m_3}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^3}(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)$ puisque la longueur du vecteur $\dfrac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^3}$ est $\dfrac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^2}$.

On calcule de même la force exercée par le deuxième corps sur le troisième. Comme la somme des forces est proportionnelle à la masse m_3 du corps multipliée par son accélération, c'est-à-dire la dérivée seconde de $\vec{x}_3$ par rapport au temps, $\ddot{\vec{x}}_3$, on obtient

$$m_3 \ddot{\vec{x}}_3 = K \frac{m_1 m_3}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^3}(\vec{x}_1 - \vec{x}_3) + K \frac{m_2 m_3}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|^3}(\vec{x}_2 - \vec{x}_3).$$

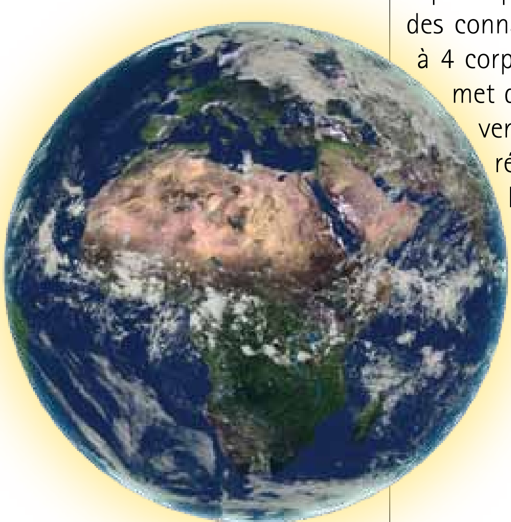
On voit qu'on peut simplifier m_3 dans cette équation, ce qui permet de l'utiliser même dans le cas limite où $m_3 = 0$! Quant aux équations décrivant le mouvement des deux premiers corps, soit

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = K \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + K \frac{m_1 m_3}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_1|^3}(\vec{x}_3 - \vec{x}_1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = K \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + K \frac{m_2 m_3}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_2|^3}(\vec{x}_3 - \vec{x}_2),$$

elles deviennent simplement les équations du mouvement à deux corps si on pose $m_3 = 0$.

Vous pouvez maintenant imaginer le *problème restreint à* N + 1 *corps*, dans lequel N corps ont une masse non nulle, et le dernier a une masse nulle.



pour s'éloigner suffisamment de la Terre, on utilise les points de Lagrange d'un deuxième système à deux corps, le système Terre-Soleil, et lorsqu'on se rapproche de Jupiter, on utilise les points de Lagrange du système formé de Jupiter et d'une de ses lunes. Dans le cas de Jupiter qui a 4 lunes, on peut aussi utiliser des connaissances sur un système restreint à 4 corps ou plus. Une telle méthode permet de concevoir des missions qui peuvent faire des nombres arbitraires de révolutions autour de chacune des lunes de Jupiter avant de revenir sur Terre, ou mieux, au relais du premier point de Lagrange entre la Terre et la Lune.

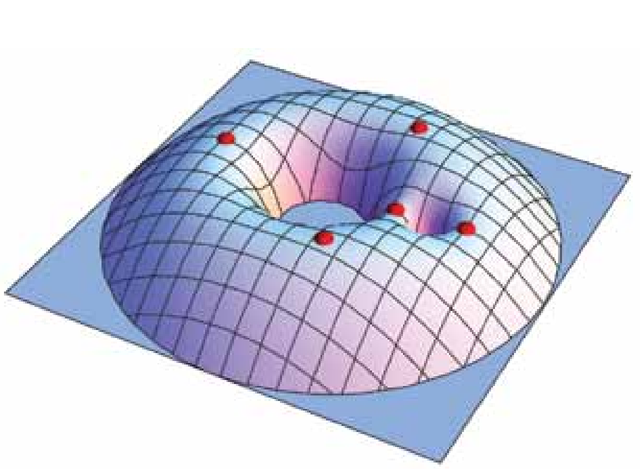
Mais comment s'y sont pris les premières missions pour s'arracher à l'attraction terrestre ?

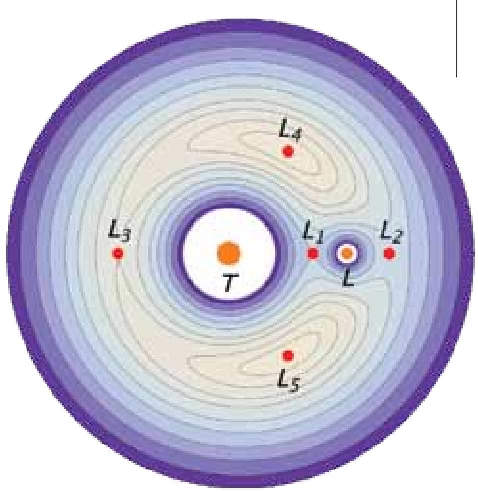
En fait, une fusée n'aura jamais assez de carburant pour donner une accélération suffisante à un engin spatial pour l'arracher à l'attraction terrestre. Une fois que l'engin est lancé, il faut lui conférer une accélération supplémentaire. Si vous avez étudié les lois de Kepler, vous savez qu'une planète est beaucoup plus rapide lorsqu'elle est proche du soleil que lorsqu'elle en est loin. Donc, pour accélérer un engin on lui fait frôler des planètes : d'abord la Terre, puis ensuite les autres planètes. Cette méthode s'appelle « fronde gravitationnelle ».

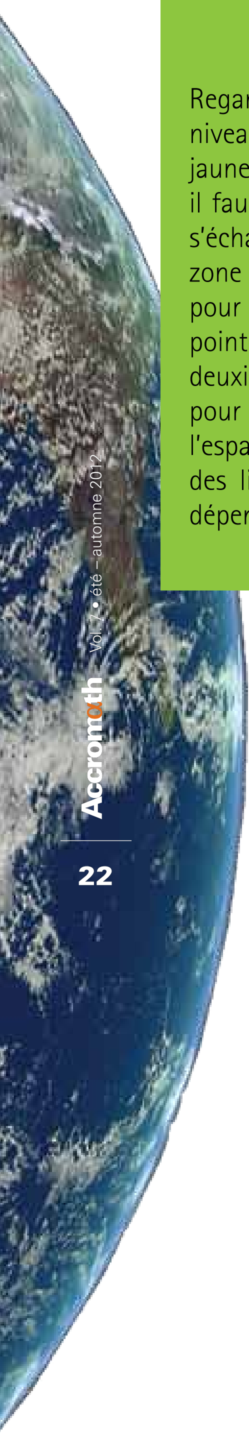
Les points de Lagrange d'un système Terre-Lune

Un peu bizarre que l'on puisse avoir cinq points de Lagrange pour le système Terre-Lune… En effet, il n'y a qu'un seul point où les forces d'attraction de la Terre et de la Lune peuvent s'annuler. Mais, c'est sans compter que ces deux corps célestes sont en mouvement ! Un point matériel situé à un autre point de Lagrange se déplace vers le centre de masse des deux autres corps, mais comme les deux autres corps bougent aussi, la configuration relative des 3 corps reste la même dans un repère en mouvement bien choisi.

Pour simplifier la description, nous allons tricher et supposer que l'orbite de la Lune est presque circulaire autour de la Terre. (Cette hypothèse est fausse, mais elle est presque vraie dans le cas du système Terre-Soleil). On a l'habitude de considérer la Terre fixe et la Lune tournant autour de la Terre. Mais, en fait, le point fixe (ou en mouvement uniforme) est le centre de masse du système et il est alors naturel d'imaginer les deux corps en rotation autour du centre de masse, à la même vitesse angulaire. Le cas particulier que nous allons regarder est celui où les deux corps décrivent chacun un cercle autour du centre de masse, chaque cercle étant parcouru à vitesse constante, et les deux cercles étant dans un même plan. La Terre décrit un cercle de petit rayon, et la Lune, un cercle de grand rayon. On décide de se placer dans un repère centré au centre de masse et tournant à la même vitesse que les deux corps. Dans ce repère la Terre et la Lune apparaissent fixes. Les points d'équilibre sont ceux où l'énergie potentielle (calculée dans ce repère en mouvement non uniforme !) a un point critique, soit un point où son gradient s'annule. La figure de gauche montre le graphe de l'énergie potentielle et les cinq points où le gradient s'annule, appelés L_1, …, L_5. Deux de ces points sont des maxima, alors que les trois autres sont des cols (aussi appelés points de selle). Les corps célestes sont situés aux centres des deux puits puisque l'énergie potentielle y vaut $-\infty$. C'est au point L_1 entre la Terre et la Lune que les forces gravitationnelles de la Terre et de la Lune se compensent exactement. La figure de droite montre les courbes de niveau de cette même énergie potentielle, les points oranges représentant la Terre et la Lune. Pour pouvoir s'échapper de l'attraction terrestre il faut accumuler assez d'énergie pour pouvoir passer par dessus la barrière qui entoure la Terre. Le point L_1 est le moins élevé de cette barrière et il est donc naturel de passer près de L_1. Ensuite, un petit peu d'énergie supplémentaire permettra de passer L_2 avant de se laisser aller sans aucune énergie.

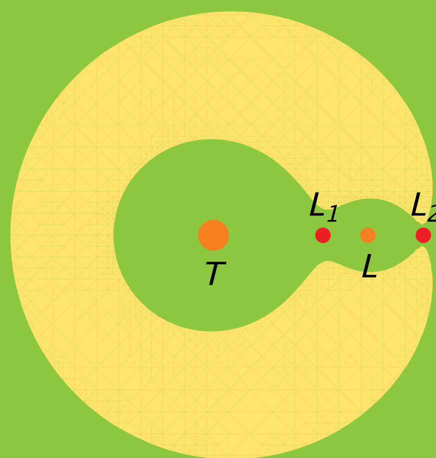




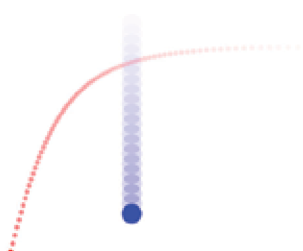


Une autre manière de voir les choses

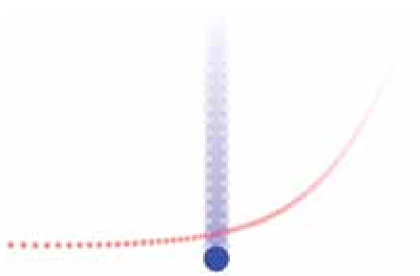
Regardons, dans la figure, ce qui est au dessus d'un certain niveau d'énergie. Comment interpréter ce dessin ? La zone jaune correspond à une énergie potentielle assez grande : il faut donc pas mal de combustible pour y pénétrer. Donc, pour s'échapper de l'attraction terrestre il vaut mieux rester dans la zone verte appelée région de Hill. On voit un passage naturel pour s'éloigner de la Terre. Il est naturel de se rapprocher du point de Lagrange, L_1, entre la Terre et la Lune, puis de viser le deuxième point de Lagrange, L_2, sans trop s'approcher de la Lune pour ne pas perdre d'énergie potentielle avant de s'élancer dans l'espace interplanétaire. Par exemple, si l'on décide de suivre des lignes de niveau, alors on peut les parcourir sans aucune dépense d'énergie !



Bien sûr lorsqu'un engin s'approche d'une planète, sa vitesse augmente, mais elle diminue lorsqu'il s'en éloigne. Alors, a-t-on vraiment gagné ? Parfois oui, parce que l'engin a changé de direction, puisque sa trajectoire au voisinage de la planète ressemble à une branche d'hyperbole. Ainsi, pour la même énergie, on pourrait se retrouver à parcourir une ellipse plus allongée. Mais, on peut aussi être plus astucieux en frôlant la planète. En effet, cette dernière est en mouvement. Si lorsqu'on la frôle, on passe derrière elle, alors on aura vraiment augmenté notre vitesse, alors que si on la coupe, la manœuvre permettra de perdre de la vitesse.



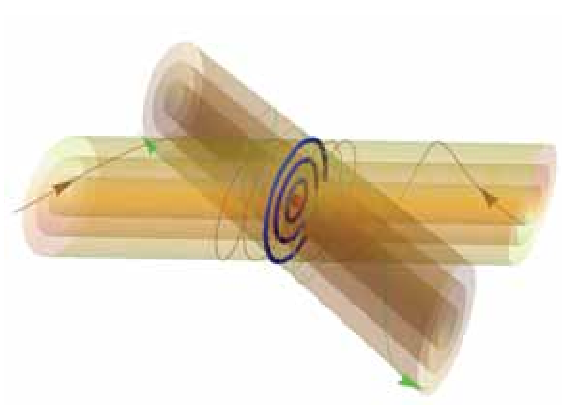
Accélération



Décélération

Des couloirs où circuler sans énergie

On a vu qu'il existe des points de Lagrange qui sont des points d'équilibre dans le problème restreint des trois corps. En fait, ces points sont des *centres organisateurs*. Près de chacun des points de Lagrange L_1, L_2 et L_3 il existe une famille de trajectoires périodiques autour de ce point situées approximativement dans un plan. Chaque trajectoire périodique est à l'intersection de deux couloirs en forme de cylindre : un premier couloir (en jaune) sur lequel on s'approche de cette trajectoire, et un deuxième couloir (orange) sur lequel on s'en éloigne. Ces couloirs cylindriques emboîtés sont ceux que doivent emprunter les missions interplanétaires si on veut économiser l'énergie.



Il se trouve que ces couloirs associés aux points de Lagrange L_1 et L_2 du système Terre-Lune sont connectés aux couloirs associés aux points de Lagrange L_1' et L_2' du système Terre-Soleil ! Ceci vient d'une coïncidence fortuite : les niveaux d'énergie potentielle des points L_1' et L_2' diffèrent très peu de ceux des points L_1 et L_2. Ainsi, envoyer un télescope de L_1 à L_1' ou L_2' requiert un minimum d'énergie, alors que ce qui demande de l'énergie, c'est d'envoyer un engin spatial sur L_1 ! D'où l'intérêt d'installer une station de relais en L_1, par exemple quand il faut effectuer des réparations sur un télescope : le ramener en L_1, le réparer sur place et le renvoyer dans l'espace demande peu d'énergie.

Ce n'est pas de la science fiction ! Ces techniques sont utilisées.

Ainsi, la sonde Genesis a été lancée en août 2001, avec pour objectif de capter des parcelles de vent solaire autour du point L_1'. Elle y est restée de décembre 2001 à fin mars 2004 (sans dépenser d'énergie puisque elle se trouvait à un point d'équilibre). Elle s'est malheureusement écrasée à son retour sur Terre car les parachutes n'ont pas fonctionné.

Plus tôt, en 1990, le Japon a lancé deux engins spatiaux, MUSES-A et MUSES-B. MUSES-B devait se mettre en orbite autour de la Lune et MUSES-A rester en orbite autour de la Terre comme relais de communication. MUSES-B a dû renoncer à cause d'ennuis techniques, et MUSES-A n'avait pas assez de combustible pour se rendre jusqu'à la Lune. Cependant, en utilisant une trajectoire plus économique découverte par Belbruno en 1986, MUSES-A a pu se mettre en orbite autour de la Lune en octobre 1991.

Dans les cartons à dessins de la NASA se trouvent un projet de station de relais en L_1, et des projets de futurs télescopes spatiaux. Ceux-ci pourraient être assemblés en L_1, pour ensuite être envoyés aux points de Lagrange L_1' et L_2' du système Terre-Soleil avec un minimum de carburant. Ils seraient ramenés près de L_1 pour l'entretien et les réparations.

Les progrès dans ces techniques doivent beaucoup aux mathématiciens. Au 20e siècle ce sont eux, plutôt que les physiciens, qui ont fait des contributions fondamentales au problème des n corps. Nous avons fait allusion ci-dessus à des missions qui pourraient faire plusieurs révolutions autour de chacune des lunes de Jupiter, Callisto, Ganymède, Europa et Io, permettant des observations prolongées de toutes ces lunes. Les plans de ces missions existent déjà. Ils sont l'œuvre conjointe de mathématiciens, dont Jerrold Marsden, un mathématicien né au Canada et décédé récemment, et son ancien étudiant Shane Ross, ainsi que d'ingénieurs de la NASA comme Martin Lo.