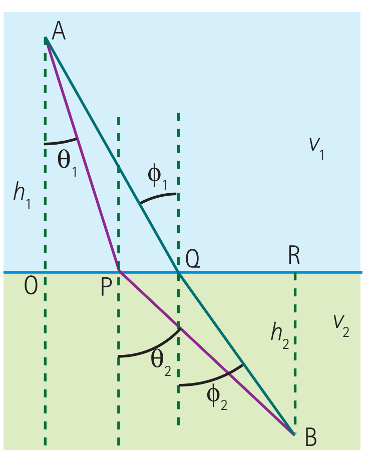
Hiver-printemps 2013
Solutions

Comment Inge Lehmann a découvert le noyau de la Terre

On considère deux milieux homogènes séparés par un plan[1]. Soient A et B deux points situés de part et d'autre du plan de démarcation. Soient v_1 la vitesse de la lumière dans le demi-espace contenant A et v_2 la vitesse de la lumière dans le demi-espace contenant B. Le chemin le plus rapide que puisse prendre un rayon allant du point A au point B en traversant le plan de démarcation est celui qui passe par le point P, où les angles θ_1 et θ_2 entre AP et BP et la normale au plan de démarcation sont ceux de la loi de la réfraction, c'est-à-dire :

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}.$$

On va faire la preuve seulement pour le problème plan de la figure. La preuve la plus simple utilise le calcul différentiel.



1. Le plan de séparation de deux milieux homogènes est appelé un *dioptre*.

On suppose que le rayon change de milieu au point Q d'abscisse x (donc, $\overline{OQ}=x$), et on pose $l=\overline{OR}$. Soient $h_1=\overline{AO}$ et $h_2=\overline{BR}$. On calcule le temps de parcours $T(x)$ entre A et B. Ce temps de parcours est égal à

$$T(x)=\frac{|\overline{AQ}|}{v_1}+\frac{|\overline{BQ}|}{v_2}.$$

Pour minimiser ce temps de parcours, on cherche x^* tel que $T'(x^*)=0$.

Comme

$$T'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+h_1^2}}-\frac{l-x}{v_2\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}},$$

alors $T'(x^*)=0$ pour x^* satisfaisant à

$$\frac{x^*}{v_1\sqrt{x^{*2}+h_1^2}}=\frac{l-x^*}{v_2\sqrt{(l-x^*)^2+h_2^2}}.$$

Le résultat découle du fait que

$$\frac{x^*}{\sqrt{x^{*2}+h_1^2}}=\sin\theta_1 \quad\text{et}\quad \frac{l-x^*}{\sqrt{(l-x^*)^2+h_2^2}}=\sin\theta_2.$$

On peut vérifier que $T''(x^*)>0$, c'est-à-dire que le point x^* est un minimum. En effet,

$$T''(x)=\frac{h_1^2}{v_1\left(x^2+h_1^2\right)^{3/2}}+\frac{h_2^2}{v_2\left((l-x)^2+h_2^2\right)^{3/2}}.$$

Regard archimédien sur le cercle : quand la circonférence prend une bouffée d'aire

1. Dans un premier temps, nous exprimons la proposition 1 du traité *De la mesure du cercle* à l'aide de formules :

$$A = \frac{1}{2} rC = \frac{1}{4} dC.$$

Une simple substitution de l'approximation $22d/7$ pour la circonférence C donnée par Archimède à la proposition 3 mène alors directement à la valeur

$$A = \frac{11}{14} d^2.$$

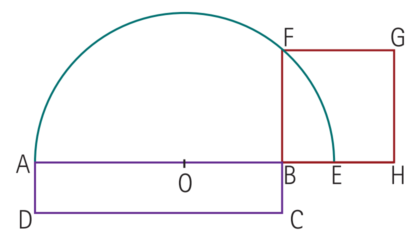
faisant l'objet de la proposition 2.

Note : Ce n'est évidemment pas ainsi, notation oblige, que procède Archimède. Son argument est entièrement géométrique, mais revient essentiellement au précédent. À noter qu'à une étape de son raisonnement, Archimède doit introduire un triangle répondant aux données de la proposition 1 : c'est alors qu'il fait intervenir la proposition 3 en construisant un triangle rectangle dont la hauteur est le rayon du cercle et dont la base est 3 fois le diamètre du cercle, plus 1/7 de ce diamètre (la base est donc la circonférence « à peu de chose près », selon les dires mêmes d'Archimède[2]).

Certains experts (mais pas tous) voient comme une « anomalie » le fait que la proposition 2 précède la troisième, tout en dépendant de cette dernière. Voir par exemple à ce sujet Thomas L. Heath, *The Works of Archimedes*, p. 93 (New York, Dover, 1953) et Paul Ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède*, tome 1, p. 129, note de bas de page 2 (Liège, Vaillant-Carmanne, 1960).

2. Faire la quadrature (*à la règle et au compas*) d'un rectangle de côtés a et b revient à construire (avec ces seuls outils) un carré d'aire ab, donc de côté $\sqrt{ab}$.

Étant donné un rectangle ABCD, prolongeons le côté AB d'une longueur BE égale à BC. Soit O, le milieu de AE, et traçons le demi-cercle de centre O et de diamètre AE. Du point B, élevons enfin une perpendiculaire coupant le cercle en F. Le carré BFGH est alors de même aire que le rectangle ABCD.[3]



En effet, les triangles ABF et EBF étant semblables (car le triangle AFE est rectangle en F, puisqu'inscrit dans un demi-cercle), on obtient l'égalité des rapports

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}.$$

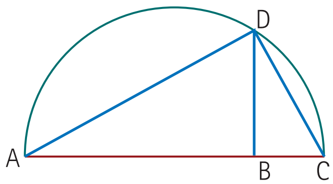
Autrement dit, la longueur BF est *moyenne proportionnelle* (ou *moyenne géométrique*) de AB et BE.
Considérant que les segments AB et BC sont respectivement de longueur a et b, on a donc $\overline{BF} = \sqrt{ab}$.

Note historique : Ce résultat se retrouve dans les *Éléments* d'Euclide, et même deux fois plutôt qu'une. À la proposition 14 du Livre II, Euclide résout le présent problème, mais dans le cadre un peu plus général d'une « figure rectiligne » quelconque (autrement dit, un polygone – voir la définition I.19 d'Euclide). L'étape-clé de cette démonstration porte justement sur la construction d'un carré de même aire qu'un rectangle, et la figure qu'utilise Euclide est à peu de chose près celle que nous avons présentée ci-haut. Un scénario similaire revient à la proposition VI.13, où Euclide montre comment trouver la moyenne pro-

2. Paul Ver Eecke, *Les œuvres complètes d'Archimède*, tome 1, p. 129 (Liège, Vaillant-Carmanne, 1960).

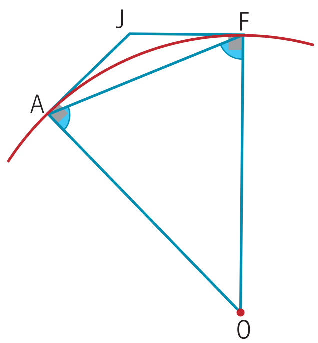
3. À noter qu'étant donné les segments AB et BC, toutes les opérations que nous venons de décrire peuvent être effectuées en utilisant seulement une règle non graduée et un compas. Nous laissons les détails aux soins du lecteur.

portionnelle de deux segments donnés, AB et BC. Il travaille alors avec la figure suivante

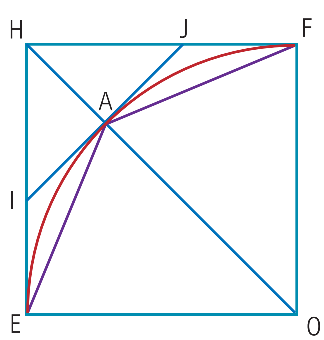


et démontre à l'aide de triangles semblables que BD est moyenne proportionnelle de ces deux segments.

3. Il convient, dans un premier temps, de se concentrer sur le quadrilatère OAJF.



Notons tout d'abord que l'angle OAJ est droit, car le segment IJ est tangent au cercle en A, et que toute telle tangente est perpendiculaire au rayon passant par le point de contact. Le même raisonnement s'applique bien sûr à l'angle OFJ. Comme OA et OF sont tous deux des rayons du cercle, le triangle OAF est donc isocèle et les angles OAF et OFA, congruents. Il s'ensuit que les deux angles JAF et JFA sont eux-mêmes congruents, de sorte que le triangle JFA est lui aussi isocèle, avec JA ≈ JF.



Considérons maintenant le triangle HAJ. Comme il s'agit d'un triangle rectangle, son hypoténuse HJ est supérieure au cathète AJ, et donc à JF également. Et si on compare les deux triangles HAJ et JFA, on voit que le premier est supérieur en aire, car ils ont même hauteur (relativement au sommet A) et que HAJ a une base plus grande, comme on vient tout juste de le montrer. De manière analogue, on montre que le triangle HAI a une aire plus grande que celle du triangle IEA.

Il s'ensuit donc que

$$A_{\text{HAJ}} + A_{\text{HAI}} > A_{\text{JFA}} + A_{\text{IEA}}.$$

Ajoutant la quantité

$$A_{\text{HAJ}} + A_{\text{HAI}}$$

de chaque côté de cette inégalité, on obtient

$$2(A_{\text{HAJ}} + A_{\text{HAI}}) > A_{\text{JFA}} + A_{\text{IEA}} + A_{\text{HAJ}} + A_{\text{HAI}},$$

c'est-à-dire

$$A_{\text{HIJ}} > \frac{1}{2} A_{\text{HEAF}}.$$

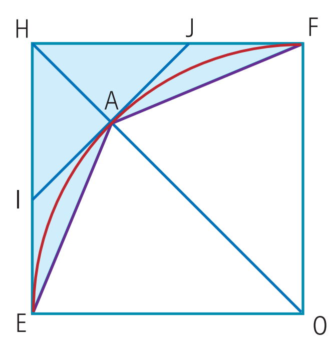
Et c'est précisément ce qu'il fallait établir!

Le lecteur pourra vérifier que les mêmes principes de raisonnement s'appliqueraient, par exemple, dans le passage de l'octogone à l'hexadécagone (alias 16-gone) circonscrits.

De là, faisant appel à la proposition X.1 d'Euclide, on conclut que la différence entre l'aire des polygones réguliers circonscrits et celle du cercle devient aussi petite que l'on veut, tel que demandé.

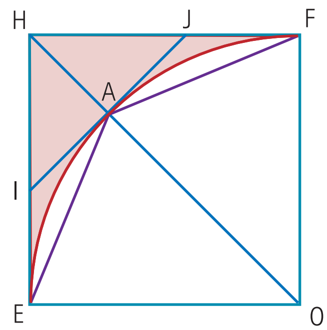
Note : L'expression « région HEAF » peut être prise ici dans deux sens :

- le *quadrilatère* HEAF



Il s'agit de la région délimitée par les segments HE, EA, AF et FH. Nous venons précisément de montrer à son sujet que l'aire du triangle HIJ surpasse la moitié de celle de HEAF.

- la *figure curviligne* HEAF



Il s'agit cette fois de la région délimitée par les segments HE et HF, ainsi que par l'arc de cercle EAF (tel que stipulé dans l'énoncé du problème). Or cette région a certainement une aire plus petite que celle du quadrilatère HEAF, de sorte que l'inégalité

$$A_{\text{HIJ}} > \frac{1}{2} A_{\text{HEAF}}$$

demeure *a fortiori* valide en l'appliquant à la région curviligne HEAF. Notons au passage que c'est de manière axiomatique qu'Archimède a réglé la question de la comparaison des aires de telles régions (HEAF rectiligne *vs* HEAF curviligne), par le truchement du postulat 4 de son traité *De la sphère et du cylindre*.

Note historique : Nous avons écrit dans l'article paru dans *Accromath* (p. 34) qu'Archimède s'appuie sur la première proposition du Livre X des *Éléments* d'Euclide pour justifier le fait que les aires des polygones réguliers (inscrits ou circonscrits) s'approchent autant que l'on veut de celle du cercle. Notons qu'à proprement parler, Archimède ne cite pas explicitement ce résultat d'Euclide. Cependant il ne fait aucun doute que c'est sur celui-ci que le grand Syracusain se repose. Voici deux données qui viennent soutenir cette assertion :

- Archimède mentionne dans son raisonnement que le triangle HIJ est plus grand (en aire) que la moitié de la figure HEAF. Le fait qu'Archimède s'intéresse à majorer *la moitié* d'une certaine quantité pointe carrément vers Euclide X.1.
- Les commentaires sur le texte original d'Archimède (qui n'est pas toujours facile à suivre, il faut le dire) offrent une chaîne permettant de remonter jusqu'à Euclide. Ainsi Paul Ver Eecke, dans ses notes présentées dans *Les œuvres complètes d'Archimède*, tome 1 (p. 128), renvoie d'abord à la proposition 6 du Livre I du traité *De la sphère et du cylindre*. Or dans ses remarques sur cette proposition I.6, Ver Eecke explique (p. 13) qu'Archimède s'appuie alors sur la proposition 2 du livre XII des *Éléments* d'Euclide, proposition qui est elle-même démontrée par Euclide en invoquant la proposition X.1. Nous y voilà donc!

Notons enfin que par analogie avec l'expression *méthode d'exhaustion*, introduite pour décrire le fait d'épuiser le cercle par son intérieur à l'aide de polygones inscrits (voir p. 35), on parle parfois de *méthode de compression* lorsqu'on considère des polygones circonscrits se rapprochant de plus en plus de celui-ci de l'extérieur.