Été–automne 2012
Solutions

Mathématiques au théâtre

On cherche à multiplier :

3 755 998 251 par 5 162 303 508.

On peut d'emblée être sûr qu'au chiffre des unités, on retrouvera le seul produit des unités associées aux deux nombres, 1 par 8, c'est-à-dire 8. Cela invalide d'emblée la réponse du professeur. En estimant, on se dit qu'on aura à multiplier 4 milliards par 5 milliards, c'est-à-dire, en mettant à profit l'associativité de la multiplication et les propriétés des puissances :

$$4\times10^9\times5\times10^9 = (4\times5)\times(10^9\times10^9) = 20\times10^{18}$$

Le résultat devrait donc être autour

- de 20 trillions selon l' « échelle longue » constituée de la suite unités (10^0), milliers (10^3), millions (10^6), milliards (10^9), billions (10^{12}), billiards (10^{15}), trillions (10^{18}), trilliards (10^{21}), ... ou
- de 20 quintillions si l'on utilise l' « échelle courte » : unités (1), milliers (10^3), millions (10^6), billions (10^9), trillions (10^{12}), quadrillions (10^{15}), quintillions (10^{18}), sextillions (10^{21}), ...

Il convient de noter ici qu'autant l'élève que le professeur de *La leçon* mêlent les deux échelles, en incluant les milliards mais en négligeant les billions, billiards, trilliards et quadrilliards. C'est tellement plus facile avec les puissances de 10 pour s'y retrouver !

Les outils de calcul habituels dépassent rarement les 14 ou 16 chiffres de précision pour un nombre. Ainsi, procéder à la multiplication sur Excel nous donne un résultat approximatif écrit

1,93896E+19

dans le format dit « standard », ou

19 389 602 947 179 200 000

si on passe au format « nombre ». Les derniers chiffres témoignent de la perte de précision.

Une façon d'utiliser un tel outil tout en contournant sa limite de représentation des nombres consiste à décomposer en sommes les deux nombres à multiplier de façon telle qu'on ne dépasse pas 6 chiffres à retenir pour chacun des multiplicandes. En voici un exemple :

$$\begin{aligned}&3\,755\,998\,251 \times 5\,162\,303\,508\\ &\quad= (3\,755\,000\,000 + 998\,251) \times (5\,162\,000\,000 + 303\,508)\\ &\quad= (3\,755\times10^6 + 998\,251) \times (5\,162 \times10^6 + 303\,508)\end{aligned}$$

En tirant parti de la distributivité de la multiplication sur l'addition, on peut réécrire le tout :

$$\begin{aligned}&3\,755\,998\,251 \times 5\,162\,303\,508\\ &= (3\,755 \times 5\,162) \times10^{12} + (3\,755 \times 303\,508) \times 10^6\\ &\quad + (998\,251 \times 5\,162) \times 10^6 + (998\,251 \times 303\,508)\end{aligned}$$

Comme chacun de ces produits n'ira pas au-delà de 12 chiffres à retenir, on peut alors faire, sans perte de précision, ces multiplications avec l'outil. On pourra aussi lui déléguer l'addition des deux produits associés aux millions (10^6) .

$$\begin{aligned}&3\,755\,998\,251 \times 5\,162\,303\,508\\ &\quad = 19\,383\,310 \times 10^{12} + 1\,139\,672\,540 \times10^6\\ &\qquad + 5\,152\,971\,662 \times 10^6 + 302\,977\,164\,508\\ &\quad = 19\,383\,310\times10^{12} + 6\,292\,644\,202 \times 10^6\\ &\qquad + 302\,977\,164\,508\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à additionner ces trois termes par tranche de 6 chiffres, et là aussi, on peut faire appel à l'outil.

$3\,755\,998\,251 \times 5\,162\,303\,508$
$= (19\,383\,310 + 6\,292) \times 10^{12}$
$\quad + (644\,202 + 302\,977) \times 10^{6} + 164\,508$
$= 19\,389\,602 \times 10^{12} + 947\,179 \times 10^{6} + 164\,508$
$= 19\,389\,602\,947\,179\,164\,508$

Le dernier résultat s'obtient directement puisqu'il n'y a pas ici de « retenue » à appliquer d'une tranche à l'autre.

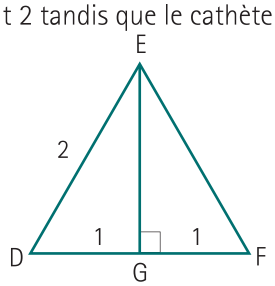
Les quatorze premiers chiffres correspondent bien à la première approximation que nous avait donnée l'outil. Comme cette approximation initiale semblait l'indiquer, l'élève aussi se trompe dans le produit qu'elle annonce :

19 390 002 844 219 164 508.

Notons toutefois à sa décharge que, son erreur n'est que de 0,002 %, qu'elle avait quand même 13 chiffres sur 20, et que parmi ceux-ci, il y avait les six derniers chiffres auxquels notre outil avait initialement renoncé ! Comme s'il était permis d'en douter, Ionesco n'avait donc pas écrit n'importe quoi ...

La quête du fameux 22/7

1. a) On peut, sans perte de généralité, supposer que le côté du triangle équilatéral initial est de longueur 2. On en tire immédiatement que l'hypoténuse DE du triangle rectangle DEG vaut 2 tandis que le cathète DG vaut 1.

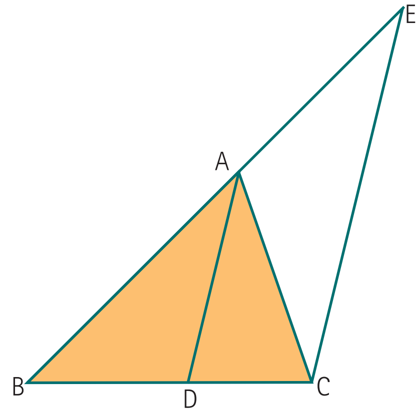


Quant à l'autre cathète, EG, il a pour longueur $\sqrt{3}$ (par Pythagore). On en tire en particulier les rapports

$$\frac{m(\overline{DE})}{m(\overline{DG})} = 2 \text{ et } \frac{m(\overline{EG})}{m(\overline{DG})} = \sqrt{3}$$

qui interviennent dans l'article.

b) Par le sommet C, traçons une parallèle à la bissectrice AD, et soit E, son point d'intersection avec le prolongement du côté AB.

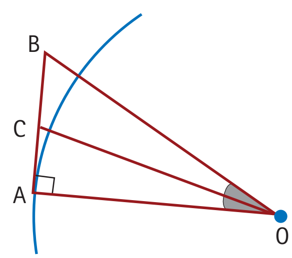


Les angles CAD et ACE sont donc congruents (car alternes-internes). Mais comme les angles BAD et CAD sont par hypothèse congruents, il s'ensuit que $\angle BAD \cong \angle ACE$. Par ailleurs les angles BAD et AEC sont eux aussi congruents (angles correspondants), de sorte que $\angle ACE \cong \angle AEC$. Le triangle ACE est donc isocèle, avec $\overline{AC} \cong \overline{AE}$.
Par le parallélisme de AD et CE, les deux triangles BAD et BEC sont semblables, de sorte que

$$\frac{m(\overline{DB})}{m(\overline{DC})} = \frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{AE})}.$$

Le résultat désiré suit en utilisant le fait que $m(\overline{AC}) \cong m(\overline{AE})$.

2.



a) AC étant bissectrice, le point C partage le côté $\overline{AB}$ de manière telle que

$$\frac{m(\overline{BO})}{m(\overline{AO})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{AC})}.$$

On en tire alors

$$1+\frac{m(\overline{BO})}{m(\overline{AO})} = 1+\frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{AC})},$$

ce qui peut se récrire

$$\frac{m(\overline{AO})}{m(\overline{AO})}+\frac{m(\overline{BO})}{m(\overline{AO})}=\frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{AC})}+\frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{AC})},$$

c'est-à-dire

$$\frac{m(\overline{AO})+m(\overline{BO})}{m(\overline{AO})}=\frac{m(\overline{AC})+m(\overline{BC})}{m(\overline{AC})}.$$

Il s'ensuit donc

$$\frac{m(\overline{AO})+m(\overline{BO})}{m(\overline{AO})}=\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{AC})},$$

et enfin, en réarrangeant,

$$\frac{m(\overline{AO})}{m(\overline{AC})}=\frac{m(\overline{AO})+m(\overline{BO})}{m(\overline{AB})}.$$

En vertu des choix faits par Archimède quant aux données précises de l'hexagone régulier initial, on a que :

$$\frac{m(\overline{BO})}{m(\overline{AB})}=2=\frac{306}{153}$$

et $$\frac{m(\overline{AO})}{m(\overline{AB})}=\sqrt{3}>\frac{265}{153}.$$

On obtient ainsi, après substitution, la borne inférieure

$$\frac{m(\overline{AO})}{m(\overline{AC})}>\frac{571}{153}.$$

b) Élevant au carré cette dernière inégalité, on en tire

$$\frac{(m(\overline{AO}))^2}{(m(\overline{AC}))^2}+1=\frac{(m(\overline{AO}))^2+(m(\overline{AC}))^2}{(m(\overline{AC}))^2}>\frac{(571)^2+(153)^2}{(153)^2}.$$

Mais, par Pythagore,

$$(m(\overline{AO}))^2+(m(\overline{AC}))^2=(m(\overline{CO}))^2.$$

On en conclut, en extrayant les racines carrées, que

$$\frac{m(\overline{CO})}{m(\overline{AC})}>\frac{\sqrt{349\ 450}}{153}.$$

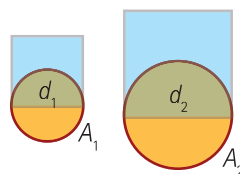
C'est à ce stade qu'Archimède fait intervenir (sans explication) la minoration

$$\sqrt{349\ 450}>591\frac{1}{8}$$

afin de borner inférieurement le rapport

$$\frac{m(\overline{CO})}{m(\overline{AC})}.$$

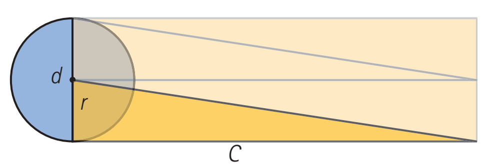
3. Nous proposons une solution suivant la même démarche que celle de Pappus, mais faisant intervenir des notations modernes (présentes bien sûr ni chez Euclide, ni chez Archimède, ni chez Pappus).
Partant tout d'abord de la proposition XII.2 des *Éléments* d'Euclide, soit donc deux cercles d'aire respective A_1 et A_2 et de diamètre d_1 et d_2 : la proposition d'Euclide affirme alors que



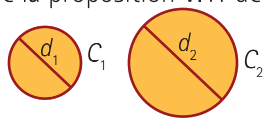
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Se concentrant maintenant sur un cercle donné d'aire A et de diamètre d, on en tire que le rapport $\frac{A}{d^2}$ est constant.

Appelons k la constante exprimant ce rapport, c'est-à-dire telle que $A = kd^2$.
Par ailleurs, la proposition 1 du texte *De la mesure du cercle* d'Archimède nous apprend que pour ce même cercle, sa circonférence C satisfait la relation $A=\frac{1}{4}dC$.



On en tire donc que $\frac{1}{4}dC=kd^2$, c'est-à-dire $C = 4kd$. Le rapport $\frac{C}{d}$ est donc une constante (en l'occurrence, 4k), ce qui est la façon usuelle aujourd'hui d'exprimer le contenu de la proposition V.11 de Pappus.



Note historique :

Tel que mentionné dans l'article *Regard archimédien sur le cercle : la quête du fameux 22/7*, la constance du rapport *circonférence/diamètre*, pour tout cercle, est un résultat dont l'acceptation se perd dans la nuit des temps. Ou peut-être devrait-on plutôt dire que « depuis toujours », on a utilisé des algorithmes du type

$$« \ d \longrightarrow 3 \times d = C \ »$$

pour calculer la circonférence d'un cercle. Avec de telles « formules », le fait que le rapport des périmètres de deux cercles est comme le rapport des diamètres devient banal.

Historiquement parlant, on a donc deux résultats de base quant au cercle :

- les circonférences de cercles sont entre elles comme les diamètres (origine inconnue)
- les aires de cercles sont entre elles comme les carrés des diamètres (Euclide, *Éléments*, XII.2).

Il en découle l'existence de deux constantes, appelons-les k_1 et k_2, telles que pour tout cercle, on a

$$\frac{C}{d} = k_1 \text{ et } \frac{A}{d^2} = k_2.$$

La question se pose bien sûr s'il y a un lien entre k_1 et k_2. Et la réponse est donnée par la proposition 1 du traité *De la mesure du cercle* d'Archimède : tel que montré plus haut, on a en effet

$$k_2 = \frac{k_1}{4}.$$

La constante k_1 a éventuellement été désignée par le symbole π.

Notons enfin que si le fait de définir π comme la constante exprimant le rapport *circonférence/diamètre* est l'approche la plus courante, il est bien sûr également possible d'introduire π directement en termes d'aire, à savoir qu'on définit ce nombre comme l'aire d'un cercle de rayon 1 (voilà un nombre dont l'« existence » ne pose aucun problème). Cela peut donner lieu à une vision intéressante, sur le plan pédagogique, des questions de périmètre et d'aire de cercles (voir par exemple le texte de Serge Lang intitulé « Pi, c'est quoi ? » dans le livre *Serge Lang, des jeunes et des maths: Un chercheur rencontre des collégiens* (pp. 6-28), Québec Science Éditeur, 1984).