Hiver–printemps 2012 Solutions

Géométrie des nombres

1. La somme de deux nombres triangulaires consécutifs est :

$$\begin{aligned} T_{n-1}+T_n &= \frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n\left(\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}\right) \\ &= n\left(\frac{2n}{2}\right)=n^2 \end{aligned}$$

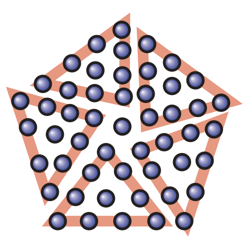
2. Les nombres triangulaires apparaissent dans les deux diagonales ombrées du Triangle de Pascal.

```
              1
            1   1
          1   2   1
        1   3   3   1
      1   4   6   4   1
    1   5  10  10   5   1
  1   6  15  20  15   6   1
1   7  21  35  35  21   7   1
.  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .  .
```

Triangle de Pascal

3. Le nombre pentagonal centré de rang n, p_n, est obtenu en ajoutant 5 lignes de $n - 1$ points au nombre de rang $n - 1$. La formule de récurrence est donc :

$$P_n = P_{n-1} + 5(n-1).$$



Nombres pentagonaux centrés

Le nombre pentagonal centré de rang n est obtenu en additionnant 1 à la somme de 5 nombres triangulaires de rang $n - 1$. La forme générale est donc :

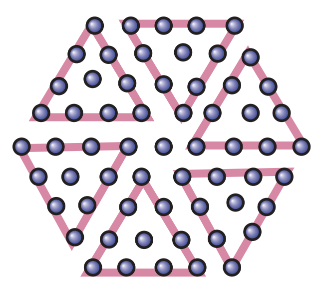
$$\begin{aligned} p_n &= 5\frac{n(n-1)}{2}+1 \\ &= 5\frac{n(n-1)+2}{2} \\ &= \frac{5n^2-5n+2}{2} \end{aligned}$$

Le polynôme au numérateur est $5^2 - 5n + 2$. Il est irréductible puisque son discriminant est négatif :

$b^2 - 4ac = 25 - 40 = -15.$

4. Le nombre hexagonal centré de rang n, h_n, est obtenu en ajoutant 6 lignes de $n - 1$ points au nombre de rang $n - 1$. La formule de récurrence est donc :

$$h_n = h_{n-1} + 6(n-1).$$



Nombres hexagonaux

Le nombre hexagonal centré de rang n est obtenu en additionnant 1 à la somme de 6 nombres triangulaires de rang $n - 1$. La forme générale est donc :

$$\begin{aligned} h_n &= 6\frac{n(n-1)}{2}+1 \\ &= 6\frac{n(n-1)+2}{2} \\ &= \frac{6n^2-6n+2}{2} \\ &= 3n^2-3n+1 \end{aligned}$$

Le polynôme au numérateur est $3^2 - 3n + 1$. Il est irréductible puisque son discriminant est négatif :

$b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3$.

5. Un nombre octogonal de rang n est obtenue en additionnant 1 à la somme de 8 nombres triangulaires de rang $n - 1$. La forme générale est donc :

$$\begin{aligned} 8T_{n-1}+1 &= 8\frac{n(n-1)}{2}+1 \\ &= 4n(n-1)+1 \\ &= 4n^2-4n+1 \\ &= (2n-1)^2 \end{aligned}$$

Le nombre octogonal centré $8T_{n-1} + 1$ le est carré de $2n - 1$. C'est donc un nombre carré. Par conséquent, il n'y a aucun nombre premier parmi les nombres octogonaux centrés.

6. Un nombre nonagonal de rang n est obtenue en additionnant 1 à la somme de 9 nombres triangulaires de rang $n - 1$. La forme générale est donc :

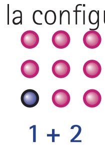
$$\begin{aligned} 9T_n+1 &= 9\frac{n(n-1)}{2}+1 \\ &= 9\frac{n(n-1)+2}{2} \\ &= \frac{9n^2-9n+2}{2} \\ &= \frac{(3n-2)(3n-1)}{2} \end{aligned}$$

Le nombre nonagonal centré $9T_{n-1} + 1$ est le produit de deux entiers consécutifs divisé par 2. C'est donc un nombre triangulaire. Ls premiers nombres nonagonaux sont :

$$\{1;\ 10;\ 28;\ \ldots\}$$

Par conséquent, il n'y a aucun nombre premier parmi les nombres nonagonaux centrés puisque le seul nombre triangulaire premier, 3, n'est pas nonagonal.

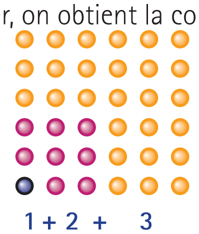
7. En construisant un carré dont le nombre de points sur un côté est la somme des deux premiers entiers, on a la configuration



dont le nombre total de points est :

$$1^3 + 2^3.$$

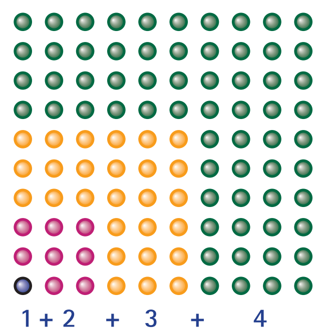
En ajoutant sur le côté du carré le troisième nombre entier, on obtient la configuration



dont le nombre total de points est

$$1^3 + 2^3 + 3^3.$$

En ajoutant sur le côté du carré le quatrième nombre entier, on obtient la configuration



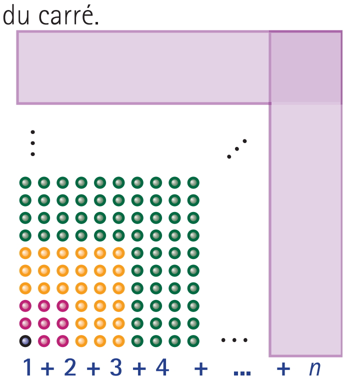
dont le nombre total de points est

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

Il existe donc des valeurs de n pour lesquelles le carré du nombre triangulaire de rang $n - 1$ est égal à la somme des cubes des $n - 1$ premiers entiers.

$$(1+2+3+\ldots+(n-1))^2 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3$$

Montrons que l'ajout d'un gnomon de n points au côté du carré de côté $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)$ points a pour effet d'ajouter n^3 au nombre de points du carré.



Le gnomon est formé de deux rectangles et d'un carré. Chacun des rectangles est de largeur n et de longueur $1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)$. Le nombre de points de chacun des rectangles est donc :

$n[1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)]$ points.

Le côté du carré est n et il contient n^2 points.

Le nombre total de points ajoutés est alors :

$$\begin{aligned}2n(1+2+3+...+(n-1))+n^2 &= 2n\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)+n^2\\ &= n^2(n-1)+n^2\\ &= n^2[(n-1)+1]\\ &= n^3\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(1+2+...+(n-1)+n)^2 = 1^3+2^3+...+(n-1)^3+n^3$$

En exprimant alors le nombre triangulaire de rang n sous sa forme générale, on obtient :

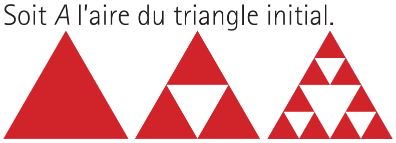
$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1^3+2^3+...+(n-1)^3+n^3.$$

La propriété sous sa forme littérale :

« le carré du nombre triangulaire de rang n est égal à la somme des cubes des n premiers entiers » est dû au mathématicien et ingénieur perse al-Karaji (953-1029). Nous avons dans la solution explicité une relation entre la démarche visuelle et la méthode de démonstration par récurrence développée à Blaise Pascal (1623-1662)[1].

Dimensions

1. Soit A l'aire du triangle initial.



Alors, l'aire de la première itérée est

$$A_1 = \frac{3}{4}A,$$

l'aire de la seconde itérée est

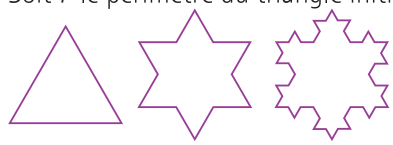
$$A_2 = \frac{3}{4}A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A.$$

L'aire de la n-ième itérée est donc

$$A_n = \frac{3}{4}A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n A.$$

Comme $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on obtient le résultat.

2. Soit P le périmètre du triangle initial.



Alors, la longueur de la première itérée est

$$P_1 = \frac{4}{3}P,$$

la longueur de la seconde itérée est

$$P_2 = \frac{4}{3}P_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 P.$$

La longueur de la n-ième itérée est donc

$$P_n = \frac{4}{3}P_{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n P.$$

Comme $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, on obtient le résultat.

1. Nous avons déjà présenté la notion de preuve par récurrence et une note historique sur Blaise Pascal dans le volume 3 d'*Accromath*, numéro hiver-printemps 2008, p. 26 à 29).