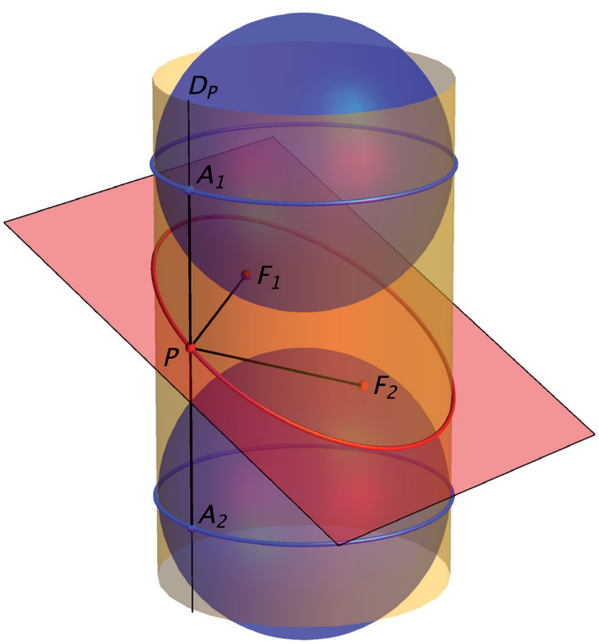
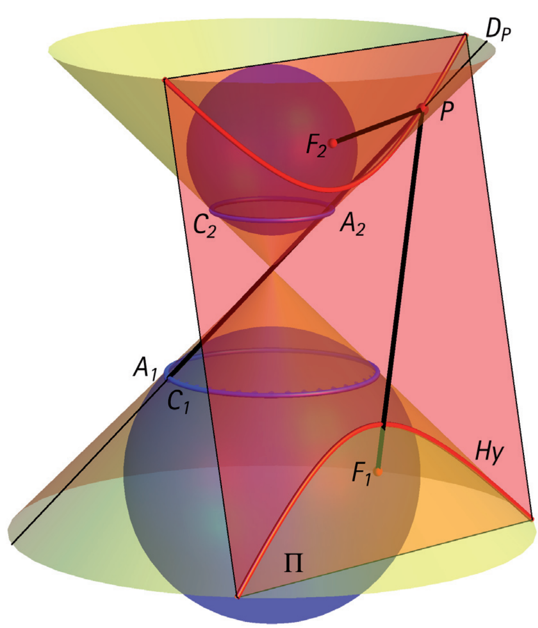
Été automne 2011
Solutions

Sphères de Dandelin

1. Si l'axe de révolution du cylindre est contenu dans le plan, alors l'intersection est l'union de deux droites. Sinon, l'intersection est une courbe E. Soit P un point quelconque de cette intersection et F_1 et F_2 les points de tangence des deux sphères de Dandelin. Enfin, soient A_1 et A_2 les points de la droite génératrice D_P passant par P qui appartiennent aux cercles de tangence des sphères de Dandelin avec le cylindre.
À nouveau, l'outil de Dandelin assure que
$$|PF_1| + |PF_2| = |PA_1| + |PA_2| = d,$$
où d est la distance entre les deux plans parallèles contenant les cercles de tangence. Puisque cette distance ne dépend pas de P, la courbe E est une ellipse.

2. Cet exercice permet une révision des constructions faites pour l'ellipse. Mais il n'est pas complètement une redite de ce cas. En effet certaines des identités devront changer puisque la définition des coniques à l'aide d'un foyer et d'une directrice fait intervenir une somme de distances pour l'ellipse et une différence pour l'hyperbole. Voici la liste des objets construits pour la preuve :
   - Hy : la courbe intersection du cône et de Π;
   - F_1 et F_2 : points de tangence des deux sphères de Dandelin avec le plan sécant Π;
   - P et D_P : un point sur Hy et la génératrice du cône en ce point;
   - C_1 et C_2 : les cercles de tangence des deux sphères de Dandelin avec le plan sécant Π;
   - A_1 et A_2 : les intersections de D_P avec Π_1 et Π_2.





Notons d'abord que, si la pente du plan est supérieure à celle du cône, les sphères de Dandelin sont situées de part et d'autre du sommet du cône de révolution. La courbe *Hy* est donc l'union de deux courbes, ni une ni l'autre ne possédant des points entre les deux plans Π_1 et Π_2. Pour un point *P* donné de cette intersection, les points A_1 et A_2 sont alors tels que un des deux segments PA_1 et PA_2 est inclus dans l'autre. Alors la valeur absolue de $|PA_1| - |PA_2|$ est la distance entre A_1 et A_2. Mais cette distance *d* est constante : c'est la distance le long d'une génératrice entre C_1 et C_2. À nouveau, l'outil de Dandelin mène à l'identité désirée :

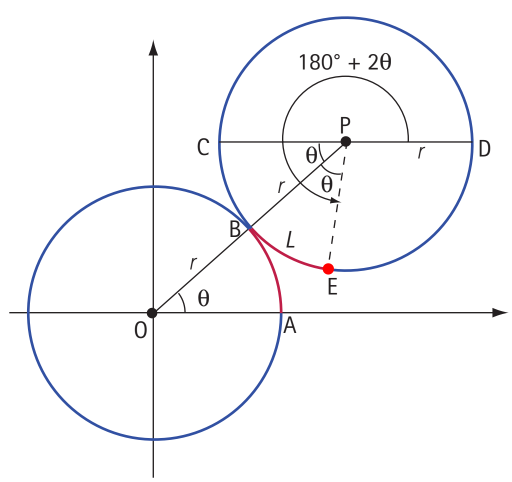
$$\left||PF_1|-|PF_2|\right|=d$$

quel que soit le point *P*.

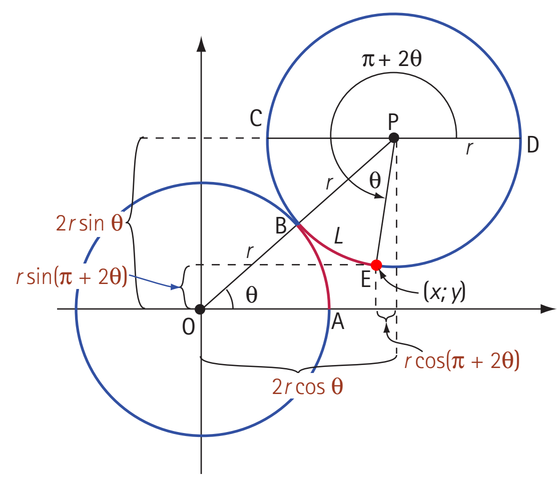
Mathématiques de la tasse de thé

1. On peut décrire la position du point E par la somme algébrique des projections des segments OP et PE sur les axes en utilisant les ressources de la trigonométrie. Pour ce faire, il faut déterminer les angles.

   Supposons que le cercle roulant, de centre P, a parcouru un arc *L*. L'arc reliant le point de tangence A au point B a la même longueur que l'arc *L*.



   Notons θ l'angle AOB, mesuré en radians. La mesure de l'angle CPB est égale à θ puisque les angles AOB et CPB sont alternes-internes. La mesure de l'arc AB est alors $r\theta$. Puisque l'arc AB et l'arc AE sont de même longueur et que les rayons sont égaux, la mesure de l'angle au centre BPE est aussi égale à θ. Par conséquent, la mesure de l'angle DPE à partir de la direction positive de l'axe horizontal est $\pi + 2\theta$.



   La longueur du segment OP joignant les centres des cercles est $2r$ et l'abscisse x du point E est la longueur algébrique de la projection horizontale de OP plus la longueur algébrique de la projection horizontale de PE, ce qui donne :

   $x = 2r\cos\theta + r\cos(\pi + 2\theta)$.

   En développant $\cos(\pi + 2\theta)$, on obtient :

   $$\begin{aligned}\cos(\pi + 2\theta) &= \cos\pi\cos 2\theta - \sin\pi\sin 2\theta\\ &= -1\times\cos 2\theta - 0\times\sin 2\theta\\ &= -\cos 2\theta.\end{aligned}$$

   Par conséquent,

   $x = 2r\cos\theta - r\cos 2\theta = r(2\cos\theta - \cos 2\theta)$.

   L'ordonnée y du point E est la longueur algébrique de la projection verticale de OP plus la longueur algébrique de la projection verticale de PE, ce qui donne :

   $y = 2r\sin\theta + r\sin(\pi + 2\theta)$.

   En développant $\sin(\pi + 2\theta)$, on obtient :

   $$\begin{aligned}\sin(\pi + 2\theta) &= \sin\pi\cos 2\theta + \cos\pi\sin 2\theta\\ &= 0\times\cos 2\theta + -1\times\sin 2\theta\\ &= -\sin 2\theta.\end{aligned}$$

   Par conséquent,

   $y = 2r\sin\theta - r\sin 2\theta = r(2\sin\theta - \sin 2\theta)$.

   Par conséquent, la description paramétrique du point générateur de la cardioïde est :

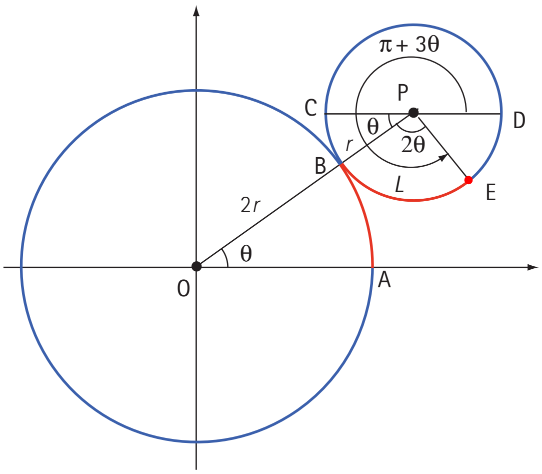
   $x(\theta) = r(2\cos\theta - r\cos 2\theta)$

   $y(\theta) = r(2\sin\theta - r\sin 2\theta)$.

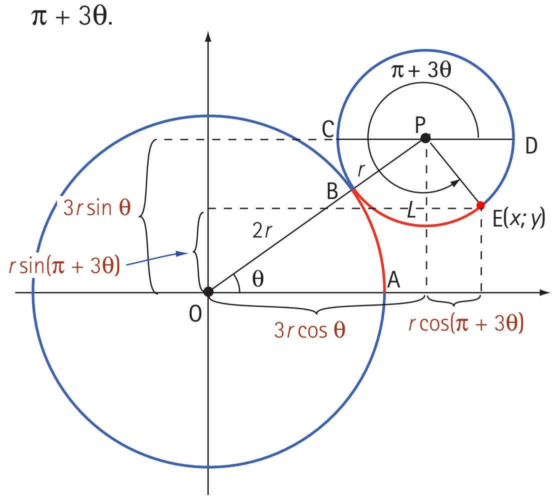
2. On peut décrire la position du point E par la somme algébrique des projections des segments OP et PE sur les axes en utilisant les res-

sources de la trigonométrie. Pour ce faire, il faut déterminer les angles.

Supposons que le cercle roulant, de centre P, a parcouru un arc *L*. L'arc reliant le point de tangence A au point B a la même longueur que l'arc *L*.



Notons θ l'angle AOB, mesuré en radians. La mesure de l'angle CPB est égale à θ puisque les angles AOB et CPB sont alternes-internes. La mesure de l'arc AB est le produit du rayon et de la mesure de l'angle, soit $2r\theta$. Puisque l'arc AB et l'arc AE sont de même longueur et que le rayon du cercle de centre P est *r*, la mesure de l'angle au centre BPE est égale à 2θ. Par conséquent, la mesure de l'angle DPE à partir de la direction positive de l'axe horizontal est $\pi + 3\theta$.



La longueur du segment OP joignant les centres des cercles est $3r$ et l'abscisse *x* du point E est la longueur algébrique de la projection horizontale de OP plus la longueur algébrique de la projection horizontale de PE, ce qui donne :

$x = 3r\cos\theta + r\cos(\pi + 3\theta)$.

En développant $\cos(\pi + 3\theta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(\pi + 3\theta) &= \cos\pi\cos 3\theta - \sin\pi\sin 3\theta\\ &= -1\times\cos 3\theta - 0\times\sin 3\theta\\ &= -\cos 3\theta.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$x = 3r\cos\theta - r\cos 3\theta = r(3\cos\theta - \cos 3\theta).$$

L'ordonnée *y* du point E est la longueur algébrique de la projection verticale de OP plus la longueur algébrique de la projection verticale de PE, ce qui donne :

$y = 3r\sin\theta + r\sin(\pi + 3\theta)$.

En développant $\sin(\pi + 3\theta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin(\pi + 3\theta) &= \sin\pi\cos 3\theta + \cos\pi\sin 3\theta\\ &= 0\times\cos 3\theta + -1\times\sin 3\theta\\ &= -\sin 3\theta.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$y = 3r\sin\theta - r\sin 3\theta = r(3\sin\theta - \sin 3\theta)$.

Par conséquent, la description paramétrique du point générateur de la cardioïde est :

$$x(\theta) = r(3\cos\theta - \cos 3\theta)$$
$$y(\theta) = r(3\sin\theta - \sin 3\theta).$$

3. En procédant de façon analogue au numéro 2, on obtient que la mesure de l'angle BPE est égal à $q\,\theta$ et l'angle DPE mesuré à partir de la direction positive de l'axe horizontal est $\pi + (q + 1)\theta$.

   La distance entre les centres des cercles est :

   $qr + r = (q + 1)r$.

   On obtient :

$$x(\theta) = r\left[(q+1)\cos\theta - \cos((q+1)\theta)\right]$$
$$y(\theta) = r\left[(q+1)\sin\theta - \sin((q+1)\theta)\right]$$

   Pour que le cercle roulant puisse revenir exactement à sa position initiale, il faut que le rapport des longueurs des rayons des cercles soit un nombre rationnel. En substituant R/r à *q*, on peut décrire l'épicycloïde sous la forme suivante.

$$x(\theta) = (R+r)\cos\theta - \cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)$$
$$y(\theta) = (R+r)\sin\theta - \sin\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta\right)$$